Tik-79.148 **Kevät 1999**
Tietojenkäsittelyteorian perusteet
Laskuharjoitus 7
Ratkaisut

1. (3.3.2 b,c) Pinoautomaatti $M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F)$, missä K, Σ, s ja F on määritelty samalla tavalla kuin tilakoneellekin. Γ on pinoaakkosto, ja $\Delta \subset (K \times (\Sigma \cup \{e\}) \times \Gamma^*) \times (K \times \Gamma^*)$ on äärellinen siirtymärelaatio.

   Pinoautomaatissa on epädeterministiseen tilakoneeseen lisätty ääretön pino, jota käytetään laskennan aikana muistina. Ainoastaan pinon huippua voidaan käsitellä.

   Siirtymässä $((q_1, a, \alpha), (q_2, \beta))$ siirrytään tilasta q_1 tilaan q_2 lukemalla a syötteestä ja α pinon päältä. Samalla laitetaan β pinoon.

   Epädeterministinen pinoautomaatti M hyväksyy sanan w (eli $w \in L(M)$) mikäli syötteelle on olemassa jokin jono siirtymiä, jotka johtavat alkutilasta lopputilaan ja suorituksen lopuksi pino on tyhjä (eli $(s, w, e) \vdash_M^* (f, e, e)$, jollekin $f \in F$).

   Tehtävässä:

   b)

$$
\begin{aligned}
M =& (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F) \\
K =& \{s, f\} \\
F =& \{f\} \\
\Sigma =& \{a, b\} \\
\Gamma =& \{c, d\} \\
\Delta =& \{((s, a, e), (s, cd)), ((s, e, e), (f, e)), \\
& ((f, b, c), (f, e)), ((f, b, d), (f, e)) \\
& ((f, e, d), (f, e))\}
\end{aligned}
$$

   Suorituksen aluksi automaatti lukee kaikki a-kirjaimet, ja tallettaa niiden määrän pinoon. Koska n saa olla mitä tahansa välillä $m \leq n \leq 2m$, käytetään pinoaakkosissa kahdenlaisia symboleita. Jokaista pinoon talletettua c-kirjainta kohden täytyy syötteestä löytyä yksi b-kirjain, mutta d-kirjaimet voi poistaa pinosta myös ilman syötteen lukemista.

c)

$$
\begin{aligned}
M =& (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F) \\
K =& \{s, f\} \\
F =& \{f\} \\
\Sigma =& \{a, b\} \\
\Gamma =& \{a, b\} \\
\Delta =& \{((s, a, e), (s, a)), ((s, b, e), (s, b)), \\
& ((s, a, e), (f, e)), ((s, b, e), (f, e)), \\
& ((s, e, e), (f, e)), ((f, a, a), (f, e)), \\
& ((f, b, b), (f, e))\}
\end{aligned}
$$

Automaatti toimii kahdessa vaiheessa:

i. Ensin luetaan sisään sanan alkupuolisko, ja talletetaan luetut kirjaimet pinoon.
ii. Automaatti arvaa epädeterministisesti sanan keskikohdan, minkä jälkeen se tarkistaa, että pinosta löytyvät samat merkit kuin syötteestä.

2. (3.3.3)

Mille tahansa pinoautomaatille $M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F)$ voidaan määritellä kieli:

$$L_f(M) = \{w \in \Sigma^* \,|\, (s, w, e) \vdash_M^* (f, e, \alpha) \text{ jollekin } f \in F, \alpha \in \Gamma^*\}$$

Kieleen $L(M)$ kuuluvat ne sanat, joille löytyy jokin pinoautomaatin suoritus, joka päätyy lopputilaan siten, että syöte on käyty loppuun ja pino on tyhjä. $L_f(M)$ lisää tähän ne sanat, joille pino ei ole tyhjä suorituksen loppuessa. Tehtävän ideana on osoittaa, että $L(M)$ ja $L_f(M)$ ovat ilmaisuvoimaltaan yhtä voimakkaita.

a) Aluksi on osoitettava, että jokaiselle pinoautomaatille M on olemassa jokin automaatti M' siten, että $L(M') = L_f(M)$.
M' voidaan muodostaa siten, että lisätään M:ään uusi lopputila, jota käytetään pinon tyhjentämiseen suorituksen lopuksi:

$$
\begin{aligned}
M' =& (K', \Sigma, \Gamma, \Delta', s, F') \\
K' =& K \cup \{f'\}, f' \notin K \\
F' =& \{f'\} \\
\Delta' =& \Delta \cup \{((f, e, e), (f', e)) \,|\, f \in F\} \\
& \cup \{((f', e, \alpha), (f', e) \,|\, \alpha \in \Gamma\}
\end{aligned}
$$

Nyt jos $w \in L_f(M)$, niin $(s, w, e) \vdash_M^* (f, e, \alpha)$ joillakin $\alpha \in \Gamma^*$ ja $f \in F$. Tällöin myös (koska automaattien siirtymät ovat lisäyksiä lukuunottamatta samat) $(s, w, e) \vdash_{M'}^* (f, e, \alpha) \vdash_{M'} (f', e, \alpha) \vdash_{M'}^* (f', e, e)$, joten $w \in L(M')$.
Toiseen suuntaan: jos $w \in L(M')$, niin $(s, w, e) \vdash_{M'}^* (f, e, \alpha) \vdash_{M'}^* (f', e, e)$. Tällöin $(s, w, e) \vdash_M^* (f, e, \alpha)$, eli $w \in L_f(M)$.

b) Vielä täytyy osoittaa, että on olemassa jokin pinoautomaatti M'' siten, että $L_f(M'') = L(M)$. Yksinkertaisin tapa konstruoida M'' on pistää suorituksen aluksi pinon pohjalle jokin symboli γ, joka ei kuulu Γ:aan, ja muuten toimia kuten M. Nyt kaikille sanoille $w \in L(M)$ päädytään konfiguraatioon (f'', e, γ), joten $w \in L_f(M'')$. Formaalimmin:

$$\begin{aligned}
M'' =& (K'', \Sigma, \Gamma'', \Delta'', s'', F'') \\
K'' =& K \cup \{f'', s''\}, f'', s'' \notin K \\
\Gamma'' =& \Gamma \cup \{\gamma\}, \gamma \notin \Gamma \\
F'' =& \{f''\} \\
\Delta'' =& \Delta \cup \{((s'', e, e), (s, \gamma), ((f, e, \gamma), (f'', e)) \,|\, f \in F\}
\end{aligned}$$

Jos $w \in L(M)$, eli $(s, w, e) \vdash_M^* (f, e, e)$ jollakin $f \in F$, niin myös $(s'', w, e) \vdash_{M''} (s, w, \gamma) \vdash_{M''}^* (f, e, \gamma) \vdash_{M''} (f'', e, \gamma)$, joten $w \in L_f(M'')$. Toiseen suuntaan: Jos $w \in L_f(M)$, eli $(s'', w, e) \vdash_{M''} (s, w, \gamma) \vdash_{M''}^* (f, e, \gamma) \vdash_{M''} (f'', e, \gamma)$, niin myös $(s, w, e) \vdash_M (f, e, e)$ eli $w \in L(M)$. Todistuksessa on oleellista huomata, että $\gamma \notin \Gamma$. Tämän vuoksi sitä ei käytetä missään Δ:n siirtymässä, joten voidaan olla varmoja, että pinossa on ainoastaan yksi γ, joka sinne aluksi laitettiin.

3. (3.4.1/3.4.2)

Annettua yhteydetöntä kielioppia $G = (V, \Sigma, R, S)$ vastaava pinoautomaatti voidaan muodostaa seuraavasti:

Automaattiin otetaan kaksi tilaa, p ja q. p on alkutila, josta siirrytään ensimmäisellä siirtymällä tilaan q, jossa pysytään koko loppusuorituksen ajan. Kieliopin ja pinoautomaatin aakkostot vastaavat toisiaan, joten $M = (\{p, q\}, \Sigma, V, \Delta, p, \{q\})$.

Siirtymäfunktio Δ:an kuuluvat seuraavat siirtymät:

1. $((p, e, e), (q, S))$
2. $((q, e, A), (q, x)$ kaikille säännöille $A \to x$.
3. $((q, a, a), (q, e))$ kaikille $a \in \Sigma$

Automaatin suorituksen aluksi asetetaan pinoon kieliopin aloitussymboli. Tämän jälkeen voidaan pinon päällä oleva nonterminaali korvata jonkin vastaavan säännön oikealla puolella. Mikäli pinon päällä on jokin terminaalisymboli, luetaan sama symboli syötteestä.

Noudattamalla ylläolevia sääntöjä tehtävän kielioppiin saadaan aikaan pinoautomaatti $M = (\{p, q\}, \Sigma, V, \Delta, p, \{q\})$, missä

$$\begin{aligned}
\Delta =\{& ((p, e, e), (q, s)) && 1. \\
& ((q, e, S), (q, e)) && 2. \\
& ((q, e, S), (q, SS)) && 2. \\
& ((q, e, S), (q, (S))) && 2. \\
& ((q, (, (), (q, e)) && 3. \\
& ((q,),)), (q, e)) && 3.
\end{aligned}$$