Tik-79.148 **Kevät 1999**
Tietojenkäsittelyteorian perusteet
Laskuharjoitus 6
Ratkaisut

1. (3.1.2)

   Yhteydettömässä kieliopissa $G = (V, \Sigma, R, S)$ V on kieleen kuuluvien merkkien joukko, $\Sigma \subset V$ on kielen terminaalisymbolien joukko. Kaikki kieleen kuuluvat sanat koostuvat pelkästään terminaalisymboleista, joukkoon $V - \Sigma$ kuuluvia symboleita (nonterminaaleja) käytetään pelkästään kielen sanojen johtamisessa. $R \in (V - \Sigma) \times V^*$ on joukko muunnossääntöjä. $S \in V - \Sigma$ on kielen aloitussymboli.

   Tehtävän kielioppi on

$$\begin{aligned}
V &= \{a, b, S, A\} \\
\Sigma &= \{a, b\} \\
R &= \{S \to aAa, S \to bAb, S \to e, A \to SS\}
\end{aligned}$$

   Sana *baabbb* voidaan johtaa tällä seuraavasti:

$$\begin{aligned}
S &\to bAb \to bSSb \to baAaSb \to baSSaSb \\
&\to baSaSb \to baaSb \to baabAbb \\
&\to baabSSbb \to baabSbb \to baabbb
\end{aligned}$$

   Kielen sanoissa esiintyvät a ja b aina pareittain, siten että jokaisen parin sisällä voi olla muita pareja.

2. (3.1.3 a, c)

   a) Kieltä $L = \{wcw^R \,|\, w \in \{a, b\}^*\}$ vastaa yhteydetön kielioppi:

$$\begin{aligned}
G =& (V, \Sigma, R, S) \\
\Sigma =& \{a, b, c\} \\
V =& \{a, b, c, S\} \\
R =& \{S \to aSa \\
& S \to bSb \\
& S \to c\}
\end{aligned}$$

   Esimerkiksi kieleen kuuluvan sanan *abbcbba* johto menee seuraavasti:

$$S \to aSa \to abSba \to abbSbba \to abbcbba$$

c) Kieltä $L = \{w \in \{a,b\}^* \,|\, w = w^R\}$ vastaa yhteydetön kielioppi

$$\begin{aligned} G =& (V, \Sigma, R, S) \\ \Sigma =& \{a, b\} \\ V =& \{a, b, S\} \\ R =& \{S \rightarrow aSa \\ & S \rightarrow bSb \\ & S \rightarrow e \\ & S \rightarrow a \\ & S \rightarrow b\} \end{aligned}$$

Esimerkiksi *ababa* johdetaan:

$$S \rightarrow aSa \rightarrow abSba \rightarrow ababa,$$

ja *abbbba*:

$$S \rightarrow aSa \rightarrow abSba \rightarrow abbSbba \rightarrow abbbba$$

3. (3.1.4)

Aakkoston $\Sigma = \{a, b, (,), \cup, ^*, \emptyset\}$ sallitut säännölliset lausekkeet voi generoida kieliopilla $G = (V, \Sigma, R, S)$,

$$\begin{aligned} V =& \Sigma \cup \{S, T, F\} \\ R =& \{S \rightarrow T \cup S, S \rightarrow T \\ & T \rightarrow F, T \rightarrow F^*, \\ & T \rightarrow FT, T \rightarrow F^*T \\ & F \rightarrow \emptyset, F \rightarrow a, \\ & F \rightarrow b, F \rightarrow (S)\} \end{aligned}$$

Esimerkiksi säännöllinen lauseke $(a \cup bb)^*b$ johdetaan $S \rightarrow T \rightarrow F^*T \rightarrow (S)^*T \rightarrow (T \cup S)^*T \rightarrow (F \cup S)^*T \rightarrow (a \cup S)^*T \rightarrow (a \cup T)^*T \rightarrow (a \cup FT)^*T \rightarrow (a \cup bT)^*T \rightarrow (a \cup bF)^*T \rightarrow (a \cup bb)^*T \rightarrow (a \cup bb)^*F \rightarrow (a \cup bb)^*b$

Formaalit kielet muodostavat hierarkian, jossa jokainen porras on aina aidosti edellistä vahvempi ilmaisuvoimaltaan. Niinpä esimerkiksi säännölliset kielet voidaan kuvata säännöllisillä lausekkeilla, ja kielet, joihin kuuluvat kaikki tietyllä aakkostolla muodostettavat säännölliset lausekkeet, voidaan kuvata yhteydettömillä kieliopeilla. Ei kuitenkaan yleisesti päde, että tiettyn kieliluokan tuottavat kieliopit voitaisiin aina kuvata seuraavan luokan kieliopeilla.

4. (3.1.9 a,d / 3.1.8 a,d)

a) Kieltä $L = \{a^m b^n \,|\, m \geq n\}$ vastaava yhteydetön kielioppi on:

$$\begin{aligned} \Sigma =& \{a, b\} \\ V =& \{a, b, S, A, B\} \\ R =& \{S \rightarrow ASB, S \rightarrow e \\ & A \rightarrow Aa, A \rightarrow a, \\ & B \rightarrow b, B \rightarrow e\} \end{aligned}$$

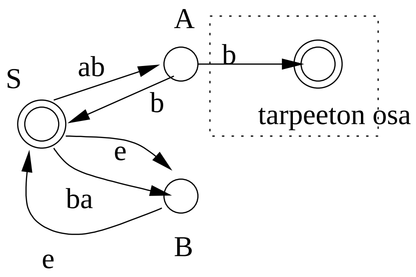
d) Kieltä $L = \{uawb | u, w \in \{a,b\}^*, |u| = |w|\}$ vastaava yhteydetön kielioppi on

$$\begin{aligned}
\Sigma =& \{a, b\} \\
V =& \{a, b, S, T\} \\
R =& \{S \to Tb, T \to aTa, \\
& T \to aTb, T \to bTb \\
& T \to bTa, T \to a\}
\end{aligned}$$

5. (3.1.10a / 3.2.1)

Kielioppi on säännöllinen, mikäli $R \subseteq (V - \Sigma) \times \Sigma^*((V - \Sigma) \cup \{e\})$, eli säännöissä saa olla oikealla puolella korkeintaan yksi nonterminaali, ja sen täytyy olla viimeisenä.

Säännöllistä kielioppia vastaavan epädeterministisen tilakoneen voi muodostaa ottamalla koneesen tila jokaista kieliopin nonterminaalia varten. Aina kun kieliopissa on sääntö $A \to uB, A, B \in (V - \Sigma), u \in \Sigma^*$, asetetaan A:ta vastaavasta tilasta kaari u tilaan B. Lisäksi otetaan yksi erityinen lopputila, johon viedään kaikki kaaret, jotka ovat muotoa $R \to u, u \in \Sigma^*$. Lopputiloiksi kelpaavat kaikki ne tilat, joihin sana voi päättyä.



Tilakoneessa A:sta lähtevä kaari erityiseen lopputilaan on tässä tapauksessa turha, sillä myös lopputilaan S päästään b-kaarella.

Kielioppi generoi sanan *abba* seuraavasti: $S \to abA \to abbS \to abbB \to abbaS \to abba$. Tilakone puolestaan käy läpi tilat S, A, S, B, S, mikä vastaa tarkalleen sanan johdossa läpikäytyjä nonterminaaleja.