Tik-79.148 **Kevät 1999**
Tietojenkäsittelyteorian perusteet
Laskuharjoitus 4
Ratkaisut

Deterministinen tilakone on monikko $M = (K, \Sigma, \delta, s, F)$, missä K on äärellinen tilojen joukko, Σ aakkosto, δ funktio $K \times \Sigma \to K$, $s \in K$ alkutila ja $F \subseteq K$ hyväksyttyjen lopputilojen joukko.
Kukin tilakone vastaa yhtä säännöllistä kieltä. Tilakone lähtee liikkeelle alkutilasta ja käy syötteen läpi kirjain kirjaimelta siirtyen aina δ:n mukaiseen uuteen tilaan. Jos tilakone on sanan loppuessa jossain F:n tilassa, sana kuuluu kieleen, muussa tapauksessa se ei kuulu.
Epädeterministinen tilakone $M = (K, \Sigma, \Delta, s, F)$ eroaa deterministisestä tilansiirtorelaationsa osalta. Epädeterminisisessä koneessa relaatio $\Delta \subset K \times \Sigma \cup \{e\} \times K$, eli yhdestä tilasta voi olla monta eri siirtymää samalle symbolille, ja lisäksi sallitaan tyhjät (e) siirtymät, joissa automaatti voi siirtyä epädeterministisesti uuteen tilaan ilman mitään syötettä. Epädeterministinen tilakone hyväksyy sanan, mikäli löytyy jokin reitti alkutilasta lopputilaan. Sovellutuksissa ei ole mahdollista vain arvata suoraan oikeaa reittiä lopputilaan, vaan käytännössä joudutaan käymään kaikki mahdolliset reitit systemaattisesti läpi. Epädeterministisiä tilakoneita kuitenkin käytetään, koska on olemassa tehokkaita algoritmeja epädeterministisen tilakoneen muodostamiseksi säännöllisestä lausekkeesta. Mikäli suorituksen nopeus on tärkeää, voidaan epädeterministinen kone muuttaa aina deterministiseksi.

1. (2.1.2)

   (a) Tilakone hyväksyy kielen, jossa jokainen sana alkaa a:lla, ja sen jälkeen toistuu ba kuinka monta kertaa tahansa. Formaalimmin kone on
   $M = (K, \Sigma, \delta, s, F), K = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$ (tilat numeroitu myötäpäivään alkutilasta lähtien), $s = q_0, F = \{q_1\}$. Tilasiirtofunktio δ on:

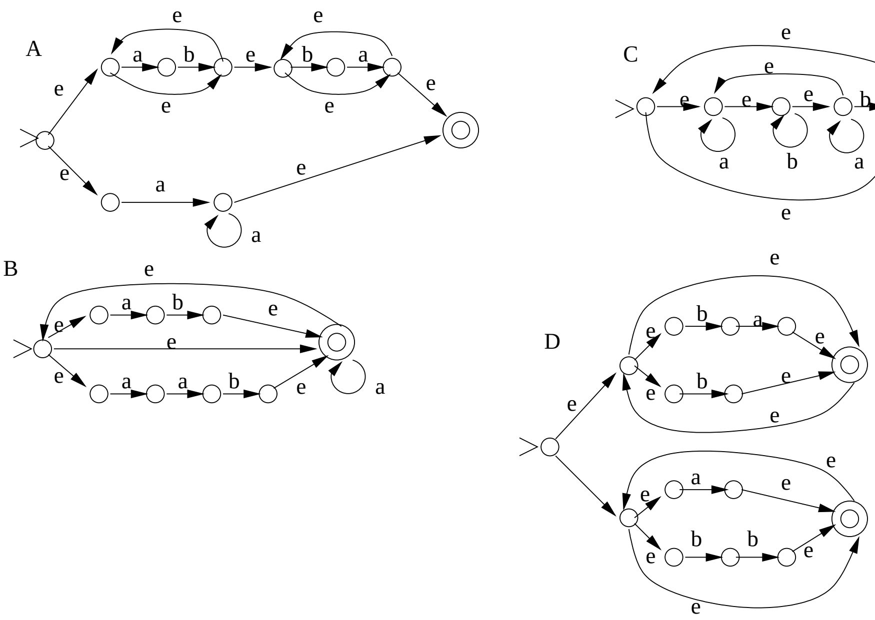
Tila	Symboli	Uusi Tila
q_0	a	q_1
q_0	b	q_3
q_1	a	q_2
q_1	b	q_0
q_2	a	q_3
q_2	b	q_3
q_3	a	q_3
q_3	b	q_3

Tilakonetta vastaava säännöllinen lauseke on $(a(ba)^*)$.

(b) Aluksi saa olla kuinka monta a:ta tahansa ja lopuksi yksi b. (a^*b).

(c) Joko tyhjä, tai sitten alkaa a:lla, yhtä monta a:ta kuin b:tä, kuitenkin korkeintaan kaksi peräkkäistä a:ta. $(a(ab)^*b)^*$.

2. (2.2.3/2.2.2)

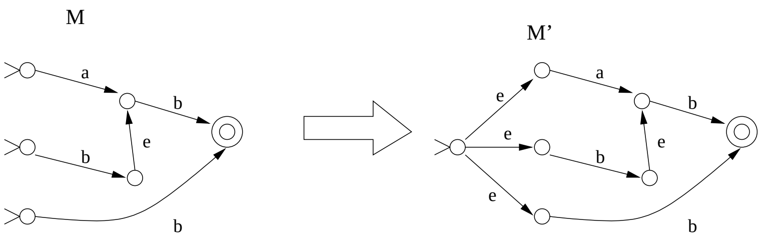


3. (2.2.4b / 2.2.5)

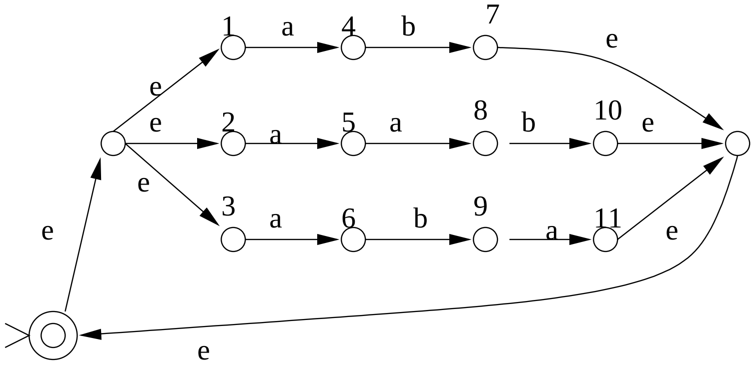
Olkoon $M = (K, \Sigma, \Delta, S, F)$, missä $S \subseteq K$ on alkutilojen joukko. Tällaiselle koneelle voidaan aina konstruoida vastaava tavallinen epädeterministinen tilakone seuraavasti:

$$M' = (K \cup \{s'\}, \Sigma, \Delta', s', F), s' \notin K, \text{ jossa}$$
$$\Delta' = \Delta \cup \{(s', e, s) | s \in S\}$$

Konstruktion perusajatuksena on, että M' on muuten samanlainen kone kuin M on, mutta siihen lisätään yksi tila lisää. Tämä uusi tila otetaan alkutilaksi, ja lisätään siitä e-siirtymät kaikkiin M:n alkutiloihin. Nyt M' on kirjan määritelmän mukainen yhden alkutilan automaatti, ja molemmat tilakoneet hyväksyvät selvästikin saman kielen, eli $L(M) = L(M')$. Ehdotettu laajennus ei siis tuo tilakoneisiin lisää ilmaisuvoimaa.



4. (2.2.6 / 2.3.1)

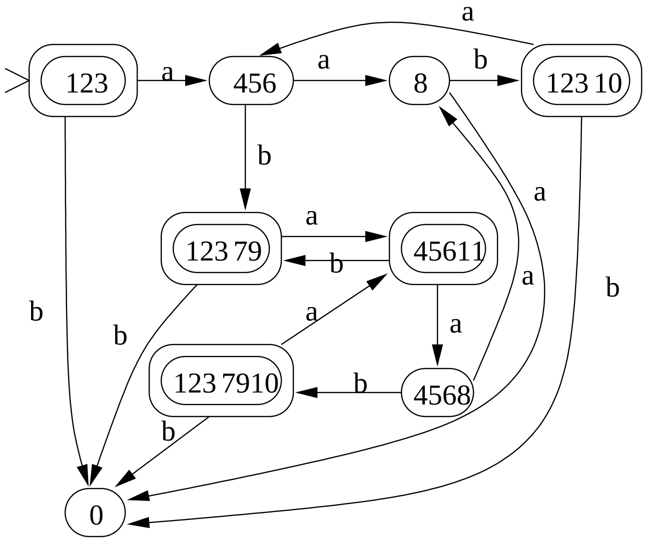


a)

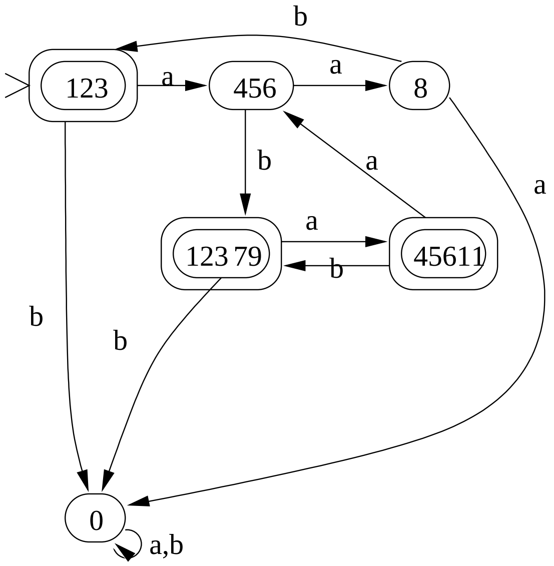
b) Tilakone muutetaan determinisiseksi siten, että muodostetaan kaikille mahdollisille syötteille kaikkien niiden tilojen joukko, jossa epädeterministinen tilakone voi olla. Näistä joukoista tehdään deterministisen tilakoneen tilat.

Tehtävän tilakoneessa on yksinkertaisuuden vuoksi numeroitu ainoastaan ne tilat, joihin ei liity pelkkiä e-siirtymiä. Tilakoneen alkutilasta päästään e-siirtymillä tiloihin 1, 2 ja 3, joten determinististen tilakoneen alkutilaksi tulee tila 123. Näistä kolmesta tilasta voidaan a:lla siirtyä tiloihin 4, 5 tai 6, ja b:llä ei päästä minnekään. Alla on tilasiirtymien taulukko (sitäkin on yksinkertaistettu, esimerkiksi toisella rivillä oleva tila 79 pitää sisällään myös kaikki ne tilat, joihin päästään e-siirtymillä tiloista 7 ja 9). Lopputiloiksi otetaan kaikki ne tilat, joihin sisältyy jokin epädeterministisen tilakoneen lopputiloista.

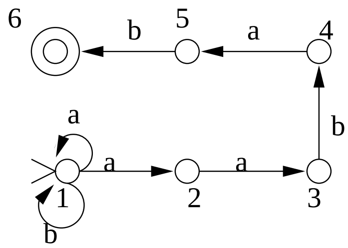
Tila	a	b
123	456	∅
456	8	12379
8	∅	12310
12379	45611	∅
12310	456	∅
45611	4568	12379
4568	8	1237910
1237910	45611	∅



c) Tarkastelemalla saatua tilakonetta huomataan, että tilat 123 ja 12310 ovat molemmat lopputiloja, ja niistä lähtevät kaaret vievät samoihin tiloihin. Ne voidaankin yhdistää. Samoin myös 12379 ja 1237910 ovat ekvivalentit. Kun 12379 ja 1237910 on yhdistetty, ovat myös 468 ja 4568 ekvivalentteja. Minimoitu tilakone on:

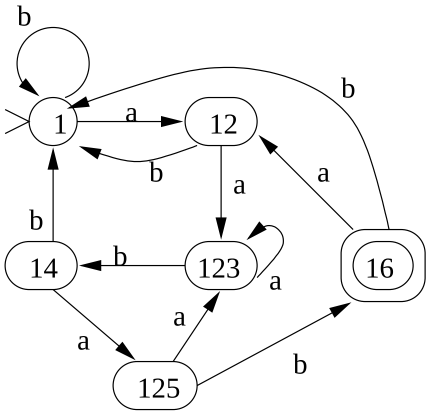


5. (2.2.7 / -)

a) 

b) Tilataulukko on:

Tila	a	b
1	12	1
12	123	1
123	123	14
14	125	1
125	123	16
16	12	1



c) Saadusta tilakoneesta ei voida supistaa yhtään tilaa pois. Tiloista 1 ja 16 lähtevät kaaret menevät kyllä samoihin tiloihin, mutta koska vain toinen niistä on lopputila, ei niitä saa yhdistää.

6. (- /2.2.7)

Annettu väite:

$$(q, xy) \vdash_M^* (p, y) \text{ jos ja vain jos } (q, x) \vdash_M^* (p, e)$$

Määritelmän mukaan $(q, w) \vdash_M (q', w')$ jos ja vain jos on olemassa $u \in \Sigma \cup \{e\}$ siten, että $w = uw'$ ja $(q, u, q') \in \Delta$. Toisin sanoen, konfiguraatiosta (q, w) pääsee yhdellä askeleella konfiguraatioon (q', w') ainoastaan mikäli $w = w'$ ja tilasta q on tyhjä siirtymä tilaan q' tai w' on w:n loppuosa ja tilasta q on w:n ensimmäisellä merkillä siirtymä tilaan q'. Merkintä $\vdash_M^*$ tarkoittaa $\vdash_M$:n refleksiivistä ja transitiivista sulkeumaa.

Jos $(q, xy) \vdash_M^* (p, y)$, niin määritelmän mukaan on olemassa konfiguraatiojono $(q, xy) \vdash_M (q_1, w_1 y), \vdash_M (q_2, w_2 y) \vdash_M \cdots \vdash_M (q_n, w_n y) \vdash_M (p, y)$, missä

$$w_0 = x$$
$$w_i = uw_{i+1}, u \in \Sigma \cup \{e\}$$

Koska jokaisella askeleella uusi tila määräytyy vain syötteen ensimmäisen merkin perusteella, ei sanan muilla merkeillä ole vaikutusta siirtymään. Lisäksi syötteen pituus ei voi missään vaiheessa kasvaa, joten ei ole mahdollista, että käytäisiin välillä katsomassa joitain merkkijonon y kirjaimia, ja kirjoitettaisiin ne takaisin nauhalle. Näin ollen ylläolevan suorituksen aikana ei merkkijonoa y käytetä hyväksi missään siirtymässä ja kaikki siirtymät valitaan x:n kirjainten perusteella.

Koska pelkästään x vaikuttaa tilakoneen suoritukseen, voidaan tismalleen samat siirtymät suorittaa, vaikka y korvattaisiinkin tyhjällä merkkijonolla e, joten

$$(q, xy) \vdash_M^* (p, y) \Rightarrow (q, x) \vdash_M^* (p, e)$$

Toiseen suuntaan todistus onnistuu täysin samalla argumentilla.