**Tik-79.148** **Kevät 1999**
**Tietojenkäsittelyteorian perusteet**
**Laskuharjoitus 1**
**Ratkaisut**

1 (1.2.2 vp. 1.1.2 up)

b) Merkintä $\bigcup\{A, B, C\}$ tarkoittaa joukkojen $A$, $B$ ja $C$ unionia, ja $\bigcap\{A, B, C\}$ vastaavasti leikkausta.

$$\bigcup\{\{3\}, \{3,5\}, \bigcap\{\{5,7\}, \{7,9\}\}\} =$$
$$\bigcup\{\{3\}, \{3,5\}, \{7\}\} =$$
$$\{3,5,7\}$$

d) Merkintä $2^A$ tarkoittaa joukkoa, jonka jäseninä ovat kaikki joukon $A$ osajoukot. Joten

$$2^{\{7,8,9\}} - 2^{\{7,9\}} =$$
$$\{\emptyset, \{7\}, \{8\}, \{9\}, \{7,8\}, \{7,9\}, \{8,9\}, \{7,8,9\}\} - \{\emptyset, \{7\}, \{9\}, \{7,9\}\} =$$
$$\{\{8\}, \{7,8\}, \{8,9\}, \{7,8,9\}\}$$

e)

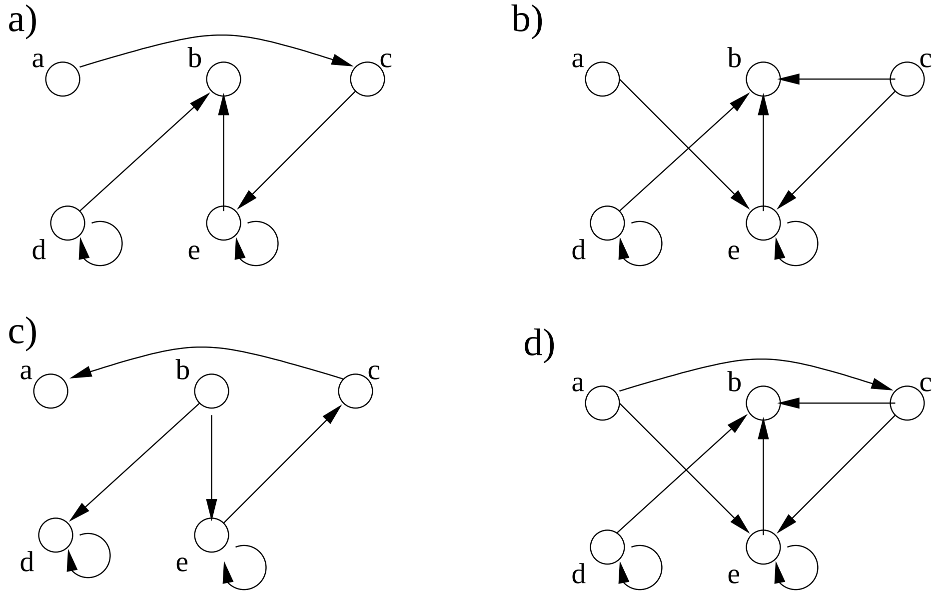
$$2^{\emptyset} = \{\emptyset\}$$

Tyhjä joukko on siis itsensä ainoa osajoukko. Sitä ei saa sekoittaa joukkoon $\{\emptyset\}$, joka on joukko, jonka ainoa alkio on tyhjä joukko. Tälle $2^{\{\emptyset\}} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

2 (1.4.1 vp. 1.3.1 up.)

Relaation $R = \{(a,c), (c,e), (e,e), (e,b), (d,b), (d,d)\}$ universumi on $R \subseteq A \times A$, missä $A = \{a, b, c, d, e\}$. Kun piirretään relaatiota vastaavaa graafia, jokaisesta A:n alkiosta tulee yksi solmu, ja kahden solmun $x, y$ välille piirretään kaari joss $(x, y) \in R$.

b) Kahden relaation $Q$ ja $R$ kompositio $Q \circ R$ muodostetaan siten, että $(a, c) \in Q \circ R$ joss on olemassa jokin $b$ siten, että $(a, b) \in Q$ ja $(b, c) \in R$. Toisin sanoen, etsitään kaikki sellaiset solmuparit,




joiden välille voidaan muodostaa polku, jonka ensimmäinen askel on relaatiossa $Q$ ja toinen relaatiossa $R$, ja laitetaan kaari näiden väliin.

Tässä $R \circ R = \{(a,e),(c,b),(c,e),(e,e),(d,b),(d,d)\}$. Näistä ensimmäinen saadaan yhdistämällä kaaret $(a,c)$ ja $(c,e)$, toinen yhdistämällä $(c,e)$ ja $(e,b)$, jne.

c) Käänteisrelaatio $R^{-1}$ muodostetaan kääntämällä kaikkien kaarien suunta toisinpäin. Kaaresta $(a,c)$ tulee siis kaari $(c,a)$.
$R^{-1} = \{(c,a),(e,c),(b,d),(b,c),(d,d),(e,e)\}$.

d) Kahden relaation unioni käsittää kaikki ne kaaret, jotka ovat jommassa kummassa relaatioissa. Kohtien a) ja b) perusteella $R \cup (R \circ R) = \{(a,c),(c,e),(e,e),(e,b),(d,b),(d,d),(a,e),(c,b)\}$.

3 (1.4.5 vp, 1.3.5 up)

Jotta relaatio voisi olla ekvivalenssirelaatio, täytyy sen olla sekä symmetrinen, transitiivinen että refleksiivinen. Tarkistetaan, toteutuvatko ehdot relaatiolle $R = \{(a,b)$, joss $f(a) = f(b)\}$, missä $f : A \to B$.

i) Relaatio $R \subseteq A \times A$ on symmetrinen, jos $(b,a) \in R$ aina kun $(a,b) \in R$. Koska

$$f(a) = f(b) \Leftrightarrow f(b) = f(a),$$

kuuluu $(b,a)$ aina relaatioon, kun $(a,b)$ kuuluu, joten symmetrisyys toteutuu.

ii) Relaatio $R \subseteq A \times A$ on refleksiivinen, jos kaikille $a \in A$ pätee $(a, a) \in R$. Koska

$$f(a) = f(a),$$

ehto toteutuu.

iii) Relaatio $R \subseteq A \times A$ on transitiivinen, jos aina kun $(a, b) \in R$ ja $(b, c) \in R$ myös $(a, c) \in R$. Toisin sanoen, mikäli alkiosta $a$ päästään jotain ketjua pitkin alkioon $b$, täytyy sinne olla myös suora yhteys.

Jos pätee

$$f(a) = f(b) \wedge f(b) = f(c),$$

niin

$$f(a) = f(b) = f(c) \Rightarrow f(a) = f(c),$$

joten myös transitiivisuus toteutuu.

Koska kaikki kolme ehtoa toteutuivat, on $R$ ekvivalenssirelaatio.

4 (1.4.8 vp, 1.3.8 up)

a) Osittaisjärjestykseltä vaaditaan, että se on refleksiivinen ja transitiivinen ja että siinä ei ole ei-triviaaleja silmukoita.

Relaatiolle $R_S = \{(A, B) \,|\, A, B \in S \text{ ja } A \subseteq B\}$

i) Koska $A \subseteq A$, kaikille $A : (A, A) \in R_S$, joten relaatio on refleksiivinen.

ii) Koska $A \subseteq B, B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$, myös transitiivisuus toteutuu.

iii) Relaatiossa voi syntyä silmukka ainoastaan, jos $A \subseteq B$ ja $B \subseteq A$. Tällöin kuitenkin $A = B$, eli silmukka on triviaali.

5 (1.5.3 vp, 1.6.3 up)

Relaatio $B$ on suljettu jonkin operaation $f(b_1, ..., b_n)$ suhteen, mikäli aina kun $b_1, ...b_n \in B$ myös $f(b_1, ..., b_n) \in B$. Toisin sanoen, jos kaikki operaation argumentit kuuluvat relaatioon, niin myös operaation tuloskin kuuluu. Esimerkiksi luonnollisten lukujen joukko on suljettu yhteenlaskun suhteen, mutta vähennyslasku ei ole, koska sen tulos voi olla negatiivinen.

Relaatiota $B$ kutsutaan relaation $R$ sulkeumaksi ominaisuuden $P$ suhteen mikäli $R \subseteq B$, ja $B$ on pienin joukko, joka on suljettu $P$:n suhteen.

Tarkastellaan relaatiota $R \subseteq A \times A$, $A = \{a, b, c, d\}$, $R = \{(a, b), (c, a)\}$. $R$ ei ole suljettu symmetrian suhteen, koska esim. $(a, b) \in R$, mutta $(b, a) \notin R$.

$R$:n symmetrinen sulkeuma $R_s$ saadaan lisäämällä kaikkiin kaariin paluukaaret. $R_s = \{(a, b), (b, a), (c, a), (a, c)\}$.

$R_s$:n transitiivista sulkeumaa $R_{st}$varten täytyy lisätä kaari $(x, z)$ aina, kun on olemassa kaaret $(x, y) \in R_s$ ja $(y, z) \in Rs$. Erityisesti täytyy huomata, että koska $R_s$ on symmetrinen, niin kaikille kaarille $(x, y) \in R_s$ on olemassa paluukaari $(y, x) \in R_s$, joten myös $(x, x) \in R_{st}$. Lisäämällä kaikki tarvittavat kaaret saadaan

$$R_{st} = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$$

Saatu $R_{st}$ ei kuitenkaan ole refleksiivinen, sillä $d \in A$, mutta $(d, d) \notin R_{st}$. Refleksiivisyyteen vaaditaan, kaikille $x \in A$ pätee $(x, x) \in R$. Tehtävän väitteelle löytyi siis vastaesimerkki.

Kannattaa kuitenkin huomata, että $R_{st}$ ei ole refleksiivinen vain siinä tapauksessa, että $A$:ssa on jokin alkio, joka ei esiinny $R$:ssä. Muulloin $R_{st}$ on refleksiivinen.