Tik-79.148 **Kevät 1998**
Tietojenkäsittelyteorian perusteet Laskuharjoitus 9
Ratkaisut

1. (4.1.7)

$$
\begin{aligned}
M &= (K, \Sigma, \delta, s) \\
K &= \{q_0, q_1\} \\
\Sigma &= \{a, b, \#\} \\
s &= q_0
\end{aligned}
$$

Siirtymäfunktio δ:

q	σ	$\delta(q,\sigma)$
q_0	a	(q_1, R)
q_0	b	(q_0, R)
q_0	$\#$	(q_0, R)
q_1	a	(h, a)
q_1	b	(q_0, R)
q_1	$\#$	(q_0, R)

2. (- / 4.2.2)

Funktio $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ on Turing-laskettava, mikäli on olemassa Turingin kone M, jolle

$$(s, \#w\underline{\#}) \vdash_M^* (h, \#v\underline{\#}) \Longleftrightarrow f(w) = v.$$

Vastaavasti funktio $g : N \to N$ on Turing-laskettava, mikäli on olemassa Turingin kone M', jolle

$$(s, \#I^m\underline{\#}) \vdash_{M'}^* (h, \#I^n\underline{\#}) \Longleftrightarrow g(m) = n.$$

Turingin koneen laskeman funktion selvittämiseksi tarkastellaan koneen toimintaa syötteillä $\#I^m\underline{\#}, m \geq 0$.

- Otetaan ensin $m = 3$. Tällöin $(q_0, \#III\underline{\#}) \vdash (q_1, \#II\underline{I}) \vdash (q_2, \#II\underline{\#}) \vdash \cdots \vdash (h, \#I\underline{\#})$, eli $f(3) = 1$. Kun $m = 2$ tai $n > 3$, huomataan, että koneen suoritus on samanlainen, joten $f(n) = n - 2$, kun $n \geq 2$.

- Kun $n = 1$, $(q_0, \#I\underline{\#}) \vdash (q_1, \#\underline{I}) \vdash (q_2, \#\underline{\#}) \vdash (q_3, \underline{\#}) \vdash (h, \#\underline{\#})$. Siis $f(1) = 0$.
- Kun $n = 0$, $(q_0, \#\underline{\#}) \vdash (q_1, \underline{\#}) \vdash (h, \#\underline{\#})$, joten $f(0) = 0$.

Turingin koneen laskema funktio on:

$$f(n) = \begin{cases} n-2 & , n \geq 2 \\ 0 & , n < 2 \end{cases}$$

3. (- / 4.2.3)

Turingin kone M ratkaisee kielen L, mikäli

$$(s, \#w\underline{\#}) \vdash_M^* (h, \#Y\underline{\#}) \text{ aina kun } w \in L \text{, ja}$$
$$(s, \#w\underline{\#}) \vdash_M^* (h, \#N\underline{\#}) \text{ aina kun } w \notin L.$$

Kielen $\{w \in \{a, b\}^* | w \text{ :ssä on ainakin yksi } a\}$ ratkaisee Turingin kone

$$M = (K, \Sigma, \delta, s)$$
$$K = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}$$
$$\Sigma = \{a, b, Y, N, \#\}$$
$$s = q_0$$

Tilansiirtofunktioon on merkitty ainoastaan ne tilat, joihin on mahdollista päätyä oikean muotoisella syötteellä:

q	σ	$\delta(q, \sigma)$
q_0	$\#$	(q_1, L)
q_1	a	$(q_2, \#)$
q_1	b	$(q_0, \#)$
q_1	$\#$	(q_5, R)
q_2	$\#$	(q_3, L)
q_3	a	$(q_2, \#)$
q_3	b	$(q_2, \#)$
q_3	$\#$	(q_4, R)
q_4	$\#$	(q_4, Y)
q_4	Y	(h, R)
q_5	$\#$	(q_5, N)
q_5	N	(h, R)

Kone toimii käymällä sanaa lopusta alkuunpäin. Niin kauan kuin vastaan ei ole tullut yhtään a-kirjainta pyöritään tilojen q_0 ja q_1 välillä, ja samalla tyhjennetään nauhaa. Jos sana loppuu ennen kuin ensimmäinen a on löytynyt, siirrytään tilaan q_5 ja kirjoitetaan nauhalle N. Kun a on löytynyt, tyhjennetään nauha tilojen q_2 ja q_3 avulla, ja lopuksi siirrytään tilaan q_4 js kirjoitetaan nauhalle Y.

4. (4.2.3 / 4.2.8)

   Turingin kone hyväksyy kielen L, mikäli $(s, \#w\underline{\#}) \vdash_M^* (h, \alpha), \alpha \in \Sigma^*$, aina kun $w \in L$. Kielen hyväksyttävyys on siten heikompi vaatimus kuin kielen ratkeavuus.

   Kielen a^*ba^*b hyväksyvä Turingin kone on:

$$M = (K, \Sigma, \delta, s)$$
$$K = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$$
$$\Sigma = \{a, b, \#\}$$
$$s = q_0$$

q	σ	$\delta(q,\sigma)$
q_0	$\#$	(q_1, L)
q_1	a	(q_1, a)
q_1	b	(q_2, L)
q_1	$\#$	$(q_1, \#)$
q_2	a	(q_2, L)
q_2	b	(q_3, L)
q_2	$\#$	$(q_2, \#)$
q_3	a	(q_3, L)
q_3	b	(q_3, b)
q_3	$\#$	$(h, \#)$

   Kone on muodostettu lähtemällä liikkeelle vastaavasta tilakoneesta. Koska kone saa pysähtyä vain silloin, kun tutkittava sana kuuluu kieleen, jätetään kone ikuiseen silmukkaan aina, kun virhe löytyy. Mainittakoon, että tehtävän kieli on itseasiassa ratkeava, eli sille olisi mahdolista konstruoida tehtävän 2. tapainen Turingin kone.