Tik-79.148 **Kevät 1998**
Tietojenkäsittelyteorian perusteet Laskuharjoitus 6
Ratkaisut

1. (3.1.3 a, c)

   a) Kieltä $L = \{wcw^R | w \in \{a,b\}^*\}$ vastaa yhteydetön kielioppi:

$$\begin{aligned} G =& (V, \Sigma, R, S) \\ \Sigma =& \{a, b, c\} \\ V =& \{a, b, c, S\} \\ R =& \{S \to aSa \\ & S \to bSb \\ & S \to c\} \end{aligned}$$

   Esimerkiksi kieleen kuuluvan sanan *abbcbba* johto menee seuraavasti:

$$S \to aSa \to abSba \to abbSbba \to abbcbba$$

   c) Kieltä $L = \{w \in \{a,b\}^* | w = w^R\}$ vastaa yhteydetön kielioppi

$$\begin{aligned} G =& (V, \Sigma, R, S) \\ \Sigma =& \{a, b\} \\ V =& \{a, b, S\} \\ R =& \{S \to aSa \\ & S \to bSb \\ & S \to e \\ & S \to a \\ & S \to b\} \end{aligned}$$

   Esimerkiksi *ababa* johdetaan:

$$S \to aSa \to abSba \to ababa,$$

   ja *abbbba*:

$$S \to aSa \to abSba \to abbSbba \to abbbba$$

2. (3.1.4)
   Aakkoston $\Sigma = \{a, b, (,), \cup, ^*, \emptyset\}$ sallitut säännölliset lausekkeet voi gene-

roida kieliopilla $G = (V, \Sigma, R, S)$,

$$\begin{aligned}
V =& \Sigma \cup \{S, T, F\} \\
R =& \{S \to T \cup S, S \to T \\
& T \to F, T \to F^*, \\
& T \to FT, T \to F^*T \\
& F \to \emptyset, F \to a, \\
& F \to b, F \to (S)\}
\end{aligned}$$

Esimerkiksi säännöllinen lauseke $(a \cup bb)^*b$ johdetaan $S \to T \to F^*T \to (S)^*T \to (T \cup S)^*T \to (F \cup S)^*T \to (a \cup S)^*T \to (a \cup T)^*T \to (a \cup FT)^*T \to (a \cup bT)^*T \to (a \cup bF)^*T \to (a \cup bb)^*T \to (a \cup bb)^*F \to (a \cup bb)^*b$

Formaalit kielet muodostavat hierarkian, jossa jokainen porras on aina edellistä vahvempi ilmaisuvoimaltaan. Niinpä säännölliset kielet voidaan kuvata säännöllisillä lausekkeilla, ja säännölliset lausekkeet puolestaan yhteydettömillä kieliopeilla.

3. (3.1.9 a,d / 3.1.8 a,d)

   a) Kieltä $L = \{a^m b^n | m \geq n\}$ vastaava yhteydetön kielioppi on:

$$\begin{aligned}
\Sigma =& \{a, b\} \\
V =& \{a, b, S, A, B\} \\
R =& \{S \to ASB, S \to e \\
& A \to Aa, A \to a, \\
& B \to b\}
\end{aligned}$$

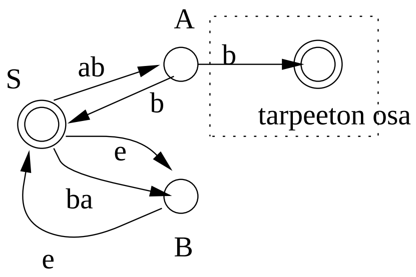
   d) Kieltä $L = \{uawb | u, w \in \{a, b\}^*, |u| = |w|\}$ vastaava yhteydetön kielioppi on

$$\begin{aligned}
\Sigma =& \{a, b\} \\
V =& \{a, b, S, T\} \\
R =& \{S \to Tb, T \to aTa, \\
& T \to aTb, T \to bTb \\
& T \to bTa, T \to a\}
\end{aligned}$$

4. (3.1.10a / 3.2.1)

   Kielioppi on säännöllinen, mikäli $R \subseteq (V - \Sigma) \times \Sigma^*((V - \Sigma) \cup \{e\}$, eli säännöissä saa olla oikealla puolella korkeintaan yksi nonterminaali, ja sen täytyy olla viimeisenä.

   Säännöllistä kielioppia vastaavan epädeterministisen tilakoneen voi muodostaa ottamalla koneesen tila jokaista kieliopin nonterminaalia varten. Aina kun kieliopissa on sääntö $A \to uB(A, B \in (V - \Sigma), u \in \Sigma^*$, asetetaan A:ta vastaavasta tilasta kaari u tilaan B. Lisäksi otetaan yksi erityinen lopputila, johon viedään kaikki kaaret, jotka ovat muotoa $R \to u, u \in \Sigma^*$. Lopputiloiksi kelpaavat kaikki ne tilat, joihin sana voi päättyä.



Tilakoneessa A:sta lähtevä kaari erityiseen lopputilaan on tässä tapauksessa turha, sillä myös tilaan S päästään b-kaarella.

Kielioppi generoi sanan $abba$ seuraavasti: $S \to abA \to abbS \to abbB \to abbaS \to abba$. Tilakone puolestaan käy läpi tilat S, A, S, B, S, mikä vastaa tarkalleen sanan johdossa läpikäytyjä nonterminaaleja.

5. (3.3.1)

Pinoautomaatti $M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F)$, missä K, Σ, s ja F on määritelty samalla tavalla kuin tilakoneellekin. Γ on pinoaakkosto, ja $\Delta \subset (K \times (\Sigma \cup \{e\}) \times \Gamma^*) \times (K \times \Gamma^*)$ on äärellinen siirtymärelaatio.

Pinoautomaatissa on epädeterministiseen tilakoneeseen lisätty ääretön pino, jota käytetään laskennan aikana muistina. Ainoastaan pinon huippua voidaan käsitellä.

Siirtymässä $((q_1, a, \alpha), (q_2, \beta))$ siirrytään tilasta q_1 tilaan q_2 lukemalla a syötteestä ja α pinon päältä. Samalla laitetaan β pinoon.

Tehtävässä

$$
\begin{aligned}
K =& \{s, f\} \\
F =& \{f\} \\
\Sigma =& \{a, b\} \\
\Gamma =& \{a\} \\
\Delta =& \{((s, a, e), (s, a)), [1.] \\
& ((s, b, e), (s, a)), [2.] \\
& ((s, a, e), (f, e)), [3.] \\
& ((f, a, a), (f, e)), [4.] \\
& ((f, b, a), (f, e))[5.]\}
\end{aligned}
$$

Epädeterministiset transitiot ovat 1. ja 3. Kun ollaan tilassa s ja luettavana merkkinä on a voidaan joko laittaa a pinoon ja pysyä tilassa s, tai voidaan siirtyä tilaan f ja jättää pino ennalleen.

a)

Tila	Syöte	Pino	Siirto
s	aba	e	-
s	ba	a	1.
s	a	aa	2.
s	e	aaa	1. (hylätään)
s	aba	e	-
s	ba	a	1.
s	a	aa	2.
f	e	aa	3. (hylätään)
s	aba	e	-
f	ba	e	3. (hylätään)

Koska kaikki kolme mahdollista suoritusta päättyivät hylkäämiseen, ei sana *aba* kuulu kieleen.

b) Oppikirjan uudessa painoksessa on tässä kohtaa painovirhe, sillä itseasiassa $aba, aa, abb \notin L(M)$ ja $baa, bab, baaaa \in L(M)$.

Sanoille *aa* ja *abb* voidaan todistus tehdä samoin kuin a-kohdassakin.

Syötteelle *baa* löytyy hyväksyvä suoritus seuraavasti:

Tila	Syöte	Pino	Siirto
s	baa	e	-
s	aa	a	2.
f	a	a	3.
f	e	e	4.

Samoin *bab* hyväksytään transitiojonolla $(2, 4, 5)$ ja *baaaa* transitioilla $(2, 1, 3, 4, 4)$.

c) Automaatin suorituksen voi jakaa kahteen vaiheeseen. Aluksi luetaan transitioilla 1. ja 2. sanan ensimmäinen puoli sisään, ja laitetaan jokaista luettua merkkiä kohden yksi a pinoon. Sanan keskikohdassa luetaan a, ja siirrytään lopputilaan. Lopuksi luetaan syötteestä yksi merkki jokaista pinoon pistettyä kohden. Kieli on siis $\{uaw | u, w \in \Sigma^*, |u| = |w|\}$.