Tik-79.148 **Kevät 1998**
Tietojenkäsittelyteorian perusteet Laskuharjoitus 3
Ratkaisut

1. (1.8.3 / 1.9.3)

   Säännölliset lausekkeet määritellään induktiivisesti:

   - $\emptyset$ ja kaikki $a \in \Sigma$ ovat säännöllisiä lausekkeita.
   - Mikäli α ja β ovat säännöllisiä lausekkeita, niin myös $(\alpha\beta), (\alpha \cup \beta)$ ja α^* ovat säännöllisiä lausekkeita.
   - Mitkään muut lausekkeet eivät ole säännöllisiä.

   Säännölliset lausekkeet on ehkä helpointa ajatella muottina. Sana kuuluu kieleen, jos sen saa sovitettua lausekkeen antamaan muottiin:

   - $ab \Rightarrow$ otetaan ensin a, sitten b
   - $a \cup b \Rightarrow$ joko a tai b
   - $a^* \Rightarrow$ otetaan kuinka monta a:ta tahansa (myös 0).

   Säännöllisten lausekkeiden unionia voidaan merkitä monilla eri tavoilla. Yleisimmät ovat $\cup$, $+$ sekä $|$. Useimmissa käytännön toteutuksissa määritellään lisäksi ylimääräisiä operaattoreita yksinkertaistamaan lausekkeita.

   Säännöllisiä lausekkeita käytetään mm. ohjelmointikielten kääntäjien syntaktiseen analyysiin sekä määrämuotoisen tekstin etsimiseen tekstitiedostoista (grep).

   (a) Kieltä $L = \{w | w \in \Sigma^*, w\text{:ssä on korkeintaan 3 } a\text{:ta.}\}$ vastaava säännölinen lauseke on: $b^*(\emptyset \cup a)b^*(\emptyset \cup a)b^*(\emptyset \cup a)b^*$

   Perusajatuksena on luetella kaikki mahdolliset a-kirjamen esiintymät, ja ympäröidä ne b-kirjaimilla. Jokaisen a:n kohdalla on myös mahdollisuus jättää se pois valitsemalla $\emptyset$.

   (b) Kieltä $L = \{w | w : \text{ssä olevien } a : \text{den määrä on jaollinen kolmella}\}$ vastaa lauseke $b^*(b^*ab^*ab^*ab^*)^*$

   (c) Kieltä $L = \{w | w\text{:ssä on tasan yksi alimerkkinono } aaa\}$ vastaa lauseke: $(b \cup ab \cup aab)^* aaa (b \cup ba \cup baa)^*$. Alimerkkijonoiksi lasketaan myös päällekäiset esiintymät, eli aaa sisältyy kaksi kertaa merkkijonoon $aaaa$.

2. (1.8.5 / 1.9.5)

   a) Väite $baa \in a^*b^*a^*b^*$ on tosi, sillä valitsemalla yksi ensimmäisistä b-kirjaimista ja kaksi toisista a-kirjaimista saadaan sana baa.

   b) Väite $b^*a^* \cap a^*b^* = a^* \cup b^*$ on tosi, sillä

$$\begin{gathered} b^*a^* \cap a^*b^* = \\ \{e, b^+, a^+, b^+a^+\} \cap \{e, a^+, b^+, a^+b^+\} = \\ \{e, a^+, b^+\} = (a \cup b)^* \end{gathered}$$

   Merkintä $a^+ = aa^*$

   c) Väite $a^*b^* \cap c^*d^* = \emptyset$ on väärä, sillä

$$\begin{gathered} a^*b^* \cup c^*d^* = \\ \{e, b^+, a^+, b^+a^+\} \cap \{e, c^+, d^+, c^+d^+\} = \\ \{e\} \neq \emptyset \end{gathered}$$

   d) Väite $abcd \in (a(cd)^*b)^*$ on myös väärä, sillä kaikki säännöllisen lausekkeen hyväksymät sanat (tyhjää sanaa lukuunottamatta) päättyvät b-kirjaimeen.

3. (2.1.3)

   Deterministinen tilakone on monikko $M = (K, \Sigma, \delta, s, F)$, missä K on äärellinen tilojen joukko, Σ aakkosto, δ funktio $K \times \Sigma \rightarrow K$, $s \in K$ alkutila ja $F \subseteq K$ hyväksyttyjen lopputilojen joukko.

   Kukin tilakone vastaa yhtä säännöllistä kieltä. Tilakone lähtee liikkeelle alkutilasta ja käy syötteen läpi kirjain kirjaimelta siirtyen aina δ:n mukaiseen uuteen tilaan. Jos tilakone on sanan loppuessa jossain F:n tilassa, sana kuuluu kieleen, muussa tapauksessa se ei kuulu.

   (a) Tilakone hyväksyy kielen, jossa jokainen sana alkaa a:lla, ja sen jälkeen ba kuinka monta kertaa tahansa. Formaalimmin kone on $M = (K, \Sigma, \delta, s, F)$, $K = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$ (tilat numeroitu myötäpäivään alkutilasta lähtien), $s = q_0$, $F = \{q_1\}$. Tilasiirtofunktio δ on:

Tila	Symboli	Uusi Tila
q_0	a	q_1
q_0	b	q_3
q_1	a	q_2
q_1	b	q_0
q_2	a	q_3
q_2	b	q_3
q_3	a	q_3
q_3	b	q_3

Tilakonetta vastaava säännöllinen lauseke on $(a(ba)^*)$.

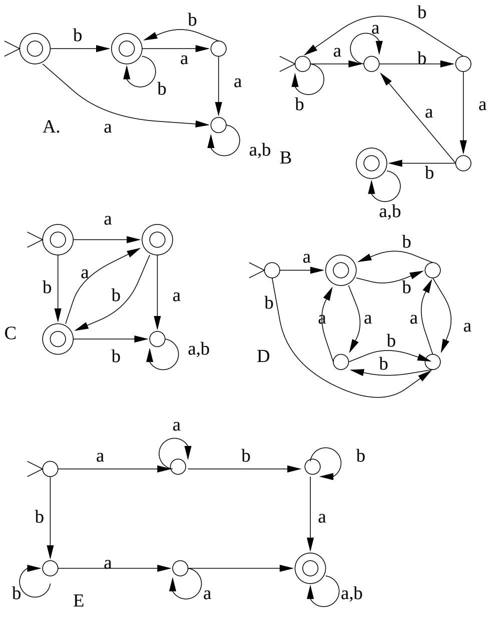
(b) Aluksi saa olla kuinka monta a:ta tahansa ja lopuksi yksi b. (a^*b).

(c) Joko tyhjä, tai sitten alkaa a:lla, yhtä monta a:ta kuin b:tä, kuitenkin korkeintaan kaksi peräkkäistä a:ta. $(a(ab)^*b)^*$.

(d) Joko tyhjä, tai sitten a ja b vuorottelevat, ja molempia on yhtä paljon. $(ab \cup ba)^*$

(e) Sanat, joissa on joko aab tai bba.
$(a + b)^*(aab + bba)(a + b)^*$

4. (2.1.3)



5. (2.2.1, b-kohta uuden painoksen mukaan)

Epädeterminisisen ja deterministisen tilakoneen ero on siirtymärelaation määritelmässä. Deterministisessä tilakoneessa δ on funktio, eli kaikille tiloille pitää löytyä kaikille syötteille täsmälleen yksi seuraajatila.

Sitävastoin epädeterministisellä tilakoneella Δ on relaatio $K \times \Sigma^* \to K$, ja jokaisella tilalla voi olla 0 tai useampia seuraajia kullekin syötteelle. Δ:aan voi kuulua myös tyhjiä eli e-siirtymiä, joissa tilakone voi siirtyä tilasta toiseen kuluttamatta syötettä.

Epädeterministinen tilakone hyväksyy syötteen, mikäli löytyy jokin reitti alkutilasta hyväksyvään lopputilaan.

a) i) hyväksyy
   ii) hyväksyy
   iii) ei hyväksy
   iv) hyväksyy

b) i) hyväksyy
   ii) hyväksyy
   iii) hyväksyy
   iv) hyväksyy
   v) ei hyväksy