Tik-79.148 **Kevät 1998**
Tietojenkäsittelyteorian perusteet Laskuharjoitus 2
Ratkaisut

1. (1.5.6 / 1.7.7)

   Juhlissa on paikalla n henkilöä. Yritetään antaa jokaiselle eri määrä tuttavia:

Henkilö	Tuttavia
1	0
2	1
3	2
...	...
n	n-1

   Nyt huomataan, että viimeinen henkilö on kaikkien tuttu, mutta ensimmäinen ei tunne ketään. Nämä arvot ovat siis ristiriidassa, ja toinen niistä on mahdoton. Jäljelle jää n henkilöä ja n-1 mahdollista tuttavuuksien lukumäärää. Kyyhkyslakkaperiaatteen mukaan kaikilla ei voi olla eri määrää tuttavuuksia.

2. (1.7.1b / 1.8.1b)

   Määritellään merkkijonojen v ja w ($v, w \in \Sigma^*$) katenaatio $v \circ w$:

   1° Jos $|v| = 0$, niin $v \circ w = w$.

   2° Jos $|v| = n + 1 > 0$, niin v voidaan kirjoittaa muodossa $v = ua$, $u \in \Sigma^*, a \in \Sigma$, ja tällöin $v \circ w = u \circ aw$.

   Esimerkiksi olkoon $\Sigma = \{a, b\}, v = aba, w = bba$. Nyt

$$\begin{aligned} v \circ w &= aba \circ bba \\ &= ab \circ abba \\ &= a \circ babba \\ &= e \circ ababba = ababba \end{aligned}$$

3. (1.7.2a / 1.8.2a)

   Tehtävässä täytyy todistaa, että mikäli merkkijono käännetään kaksi kertaa ympäri, tuloksena on alkuperäinen merkkijono. Todistus on yksinkertaisinta suorittaa induktiivisesti, ja siinä käytetään apuna oppikirjassa todistettua lausetta $(wx)^R = x^R w^R$.

1° Perustapaus: $|w| = 0$, $(e^R)^R = e$ (määritelmän mukaan $e^R = e$).

2° Induktio-oletus: Oletetaan, että väite pätee kaikille $|w| \leq n > 0$.

3° Induktioaskel: Olkoon $|w| = n+1$. Nyt w voidaan kirjoittaa muotoon $w = ua$, $a \in \Sigma, u \in Sigma^*, |u| = n$.

$$\begin{aligned}
(w^R)^R &= ((ua)^R)^R \\
&= (au^R)^R \\
&= (u^R)^R(a)^R \text{ kirjan lauseen perusteella} \\
&= (u^R)^R(ea)^R \\
&= (u^R)^R(ae^R) \\
&= (u^R)^R a \\
&= ua = w \text{ induktio-oletuksen perusteella}
\end{aligned}$$

Rivillä neljä lisättiin a:n eteen tyhjä merkkijono e, koska sanan kääntämistä ei ole määritelty erikseen yhden kirjaimen mittaisille sanoille.

4. (1.7.5 / 1.8.5)

Formaali aakkosto Σ on äärellinen joukko symboleita. Esimerkkejä ovat tavalliset aakkoset $\{a, b, ..., z\}$, tai binäärinen aakkosto $\{0, 1\}$. Yleensä aakkostoissa käytetään numeroita ja kirjaimia, mutta mitä tahansa symboleita voi käyttää.

Merkinnällä Σ^* tarkoitetaan kaikkia merkkijonoja, jotka voidaan muodostaa käyttämällä aakkoston symboleita, tyhjä sana mukaanluettuna. Esim. jos $\Sigma = \{a, b\}$, niin $\Sigma^* = \{e, a, b, aa, ab, ba, bb, ...\}$. Mikäli Σ ei ole tyhjä, on Σ^* ääretön.

Formaali kieli L on mikä tahansa Σ^*:n ääretön tai äärellinen osajoukko. Yleisesti merkitään $L = \{w \in \Sigma^* | w \text{ toteuttaa ehdon } P\}$, eli sana w kuuluu kieleen, mikäli se toteuttaa jonkin ehdon P.

a) Joukkoon $L = \{w | \text{ jollekin } u \in \Sigma\Sigma, w = uu^R u\}$ kuuluvat kaikki kuusi kirjainta pitkät sanat, joiden kaksi ensimmäistä kirjainta ovat samat kuin kaksi viimeistä ja keskellä ovat samat merkit toisinpäin. Merkintä $u \in \Sigma\Sigma$ tarkoittaa kaikkia kaksikirjaimisia sanoja.

Kieleen kuuluvat esimerkiksi sanat $abbaab$ ($u = ab$) ja $aaaaaa$ ($u = aa$). Sitävastoin $w = abbbba$ ei kuulu. Koska kahden merkin mittaisia sanoja on äärellinen määrä, on kielikin äärellinen.

b) Kieleen $L = \{w|ww = www\}$ kuuluu ainoastaan tyhjä sana e. Ehdon mukaan $2|w| = 3|w|$, joka toteutuu vain kun $|w| = 0$, eli $w = e$.

c) Kieleen $L = \{w|$ jollekin $u, v \in \Sigma^*, uvw = wvu\}$ kuuluvat kaikki sanat, sillä jos valitaan $u = v = e$ niin $e \circ e \circ w = w = w \circ e \circ e$ ja ehto toteutuu.

d) Kieleen $L = \{w|$ jollekin $u \in \Sigma^*, www = uu\}$ kuuluvia sanoja ovat esimerkiksi aa (vastaava $u = aaa$) ja $aaaa$ (vastaava $u = aaaaaa$). Sitävaston ab ei kuulu.

5. (1.8.2 / 1.9.2)

a) Lausekkeen $\emptyset^* \cup a^* \cup b^* \cup (a \cup b)^*$ kuvaamaan kieleen kuuluu tyhjä sana e sekä kaikki sanat, joissa on joko pelkästään a-kirjaimia, pelkästään b-kirjaimia tai molempia sekaisin. Koska $\emptyset^* \subset (a \cup b)^*$, $a^* \subset (a \cup b)^*$ ja $b^* \subset (a \cup b)^*$, lauseke supistuu muotoon $(a \cup b)^*$.

b) Lauseke $((a^*b^*)^*(b^*a^*)^*)^*$ kuvaa myös kielen $(a \cup b)^*$. Tämän voi nähdä jo ensimmäisestä sulkulausekkeesta: ensin otetaan 0 tai useampia a-kirjaimia, sitten 0 tai useampia b-kirjaimia ja toistetaan tätä prosessia niin monta kertaa kuin on tarpeen minkä tahansa sanan generoimiseksi.

c) Lausekkeen $(a^*b)^* \cup (b^*a)^*$ ensimmäinen osa kuvaa kaikki sanat, jotka päättyvät b-kirjaimeen, ja jälkimmäinen kaikki a-kirjaimeen päättyvät sanat. Näiden kahden unioni on taas kerran kaikkien sanojen joukko $(a \cup b)^*$.

d) Lauseke $(a \cup b)^*a(a \cup b)^*$ kuvaa kaikki sanat, joissa on ainakin yksi a, ja sitä ei voi yksinkertaistaa lainkaan. Keskellä olevaa a-kirjainta ei voi siirtää Kleenen tähden sisään, sillä silloin hyväksyttäisiin myös sanat, joissa ei ole yhtään a:ta.