Tik-79.148 **Kevät 1998**
Tietojenkäsittelyteorian perusteet
Laskuharjoitus 1, ratkaisut

1 (1.2.2 vp. 1.1.2 up)

b) Merkintä $\bigcup\{A, B, C\}$ tarkoittaa joukkojen A, B ja C unionia, ja $\bigcap\{A, B, C\}$ vastaavasti leikkausta.

$$\bigcup\{\{3\}, \{3, 5\}, \bigcap\{\{5, 7\}, \{7, 9\}\}\} =$$
$$\bigcup\{\{3\}, \{3, 5\}, \{7\}\} =$$
$$\{3, 5, 7\}$$

d) Merkintä 2^A tarkoittaa joukkoa, jonka jäseninä ovat kaikki joukon A osajoukot. Joten

$$2^{\{7,8,9\}} - 2^{\{7,9\}} =$$
$$\{\emptyset, \{7\}, \{8\}, \{9\}, \{7, 8\}, \{7, 9\}, \{8, 9\}, \{7, 8, 9\}\} - \{\emptyset, \{7\}, \{9\}, \{7, 9\}\} =$$
$$\{\{8\}, \{7, 8\}, \{8, 9\}, \{7, 8, 9\}\}$$

e)

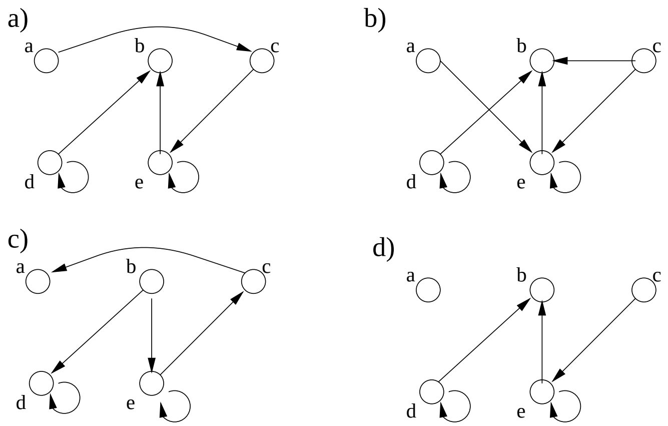
$$2^{\emptyset} = \{\emptyset\}$$

Tyhjä joukko on siis itsensä ainoa osajoukko. Sitä ei saa sekoittaa joukkoon $\{\emptyset\}$, joka on siis joukko, jonka ainoa alkio on tyhjä joukko. Tälle $2^{\{\emptyset\}} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

2 (1.4.1 vp. 1.3.1 up.)

Relaation $R = \{(a, c), (c, e), (e, e), (e, b), (d, b), (d, d)\}$ universumi on $R \subseteq A \times A$, missä $A = \{a, b, c, d, e\}$. Kun piirretään relaatiota vastaavaa graafia, jokaisesta A:n alkiosta tulee yksi solmu, ja kahden solmun x, y välille piirretään kaari joss $(x, y) \in R$.

b) Kahden relaation Q ja R kompositio $Q \circ R$ muodostetaan siten, että $(a, c) \in Q \circ R$ joss on olemassa jokin b, siten että $(a, b) \in Q$ ja $(b, c) \in R$. Toisin sanoen, etsitään kaikki sellaiset solmuparit, joiden välille voidaan muodostaa polku, jonka ensimmäinen askel



on relaatiossa Q ja toinen relaatiossa R, ja laitetaan kaari näiden väliin.

Tässä $R \circ R = \{(a, e), (c, b), (c, e), (e, e), (d, b), (d, d)\}$. Näistä ensimmäinen saadaan yhdistämällä kaaret (a, c) ja (c, e), toinen yhdistämällä (c, e) ja (e, b) jne.

c) Käänteisrelaatio R^{-1} muodostetaan kääntämällä kaikkien kaarien suunta toisinpäin. Kaaresta (a, c) tulee siis kaari (c, a). $R^{-1} = \{(c, a), (e, c), (b, d), (d, d), (e, e)\}$.

d) Kahden relaation leikkaus käsittää kaikki ne kaaret, jotka ovat molemmissa relaatioissa. Kohtien a) ja b) perusteella $R \cap (R \circ R) = \{(c, e), (d, b), (d, d), (e.b), (e, e)\}$.

3 (1.4.5 vp, 1.3.5 up)

Jotta relaatio voisi olla ekvivalenssirelaatio, täytyy sen olla sekä symmetrinen, transitiivinen että refleksiivinen. Tarkistetaan, toteutuvatko ehdot relaatiolle $R = \{(a, b), \text{ joss } f(a) = f(b)\}$, missä $f : A \to B$.

i) Relaatio $R \subseteq A \times A$ on symmetrinen, jos $(b, a) \in R$ aina kun $(a, b) \in R$. Koska

$$f(a) = f(b) \Leftrightarrow f(b) = f(a),$$

kuuluu (b, a) aina relaatioon, kun (a, b) kuuluu, joten symmetrisyys toteutuu.

ii) Relaatio $R \subseteq A \times A$ on refleksiivinen, kun kaikille $a \in A$ pätee $(a, a) \in R$. Koska

$$f(a) = f(a),$$

ehto toteutuu.

iii) Relaatio $R \subseteq A \times A$ on transitiivinen, jos aina kun $(a, b) \in R$ ja $(b, c) \in R$ myös $(a, c) \in R$. Toisin sanoen, mikäli alkiosta a päästään jotain ketjua pitkin alkioon b, täytyy sinne olla myös suora yhteys.

Jos pätee

$$f(a) = f(b) \wedge f(b) = f(c),$$

niin

$$f(a) = f(b) = f(c) \Rightarrow f(a) = f(c),$$

joten myös transitiivisuus toteutuu.

Koska kaikki kolme ehtoa toteutuivat, on R ekvivalenssirelaatio.

4 (1.4.8 vp, 1.3.8 up)

a Osittaisjärjestykseltä vaaditaan, että se on refleksiivinen, transitiivinen ja että siinä ei ole ei-triviaaleja silmukoita.

Relaatiolle $R_S = \{(A, B) | A, B \in S \text{ ja } A \subseteq B\}$

i) Koska $A \subseteq A$, kaikille $A(A, A) \in R_S$, joten relaatio on refleksiivinen.

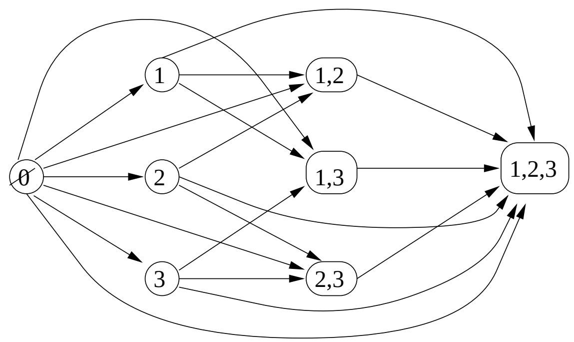
ii) Koska $A \subseteq B, B \subseteq C \Leftarrow A \subseteq B$, myös transitiivisuus toteutuu.

iii) Relaatiossa voi syntyä silmukka ainoastaan, jos $A \subseteq B$ ja $B \subseteq A$. Tällöin kuitenkin $A = B$, eli silmukka on triviaali.

Koska kaikki ehdot toteutuivat, relaatio on osittaisjärjestys.

b

$$S = 2^{\{1,2,3\}} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$



5 (1.5.3 vp, 1.6.3 up)

Relaatio B on suljettu jonkin operaation $f(b_1, ..., b_n)$ suhteen, mikäli aina kun $b_1, ...b_n \in B$ myös $f(b_1, ..., b_n) \in B$. Toisin sanoen, jos kaikki operaation argumentit kuuluvat relaatioon, niin myös operaation tuloskin kuuluu.

Relaatiota B kutsutaan relaation R sulkeumaksi ominaisuuden P suhteen, mikäli $R \subseteq B$, ja B on pienin joukko, joka on suljettu P:n suhteen.

Tarkastellaan relaatiota $R \subseteq A \times A$, $A = \{a, b, c, d\}$, $R = \{(a, b), (c, a)\}$. R ei ole suljettu symmetrian suhteen, koska esim. $(a, b) \in R$, mutta $(b, a) \notin R$.

R:n symmetrinen sulkeuma R_s saadaan lisäämällä kaikkiin kaariin paluukaaret. $R_s = \{(a, b), (b, a), (c, a), (a, c)\}$.

R_s:n transitiivista sulkeumaa R_{st}varten täytyy lisätä kaari (x, z), aina kun on olemassa kaaret $(x, y) \in R_s$ ja $(y, z) \in Rs$. Erityisesti täytyy huomata, että koska R_s on symmetrinen, niin kaikille kaarille $(x, y) \in R_s$ on olemassa paluukaari $(y, x) \in R_s$, joten myös $(x, x) \in R_{st}$. Lisäämällä kaikki tarvittavat kaaret saadaan

$$R_{st} = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$$

Saatu R_{st} ei kuitenkaan ole refleksiivinen, sillä $d \in A$, mutta $(d, d) \notin R_{st}$. Refleksiivisyyteen vaaditaan, kaikille $x \in A$ pätee $(x, x) \in R$. Tehtävän väitteelle löytyi siis vastaesimerkki.

Kannattaa kuitenkin huomata, että R_{st} ei ole refleksiivinen vain siinä tapauksessa, että A:ssa on jokin alkio, joka ei esiinny R:ssä. Muulloin R_{st} on refleksiivinen.