T-79.146 **Kevät 2005**
Logiikka tietotekniikassa: erityiskysymyksiä I
Laskuharjoitus 5
Ratkaisut

Aksioomat ja päättelysäännöt Hilbert-tyylisiä todistuksia varten:

$$\begin{aligned}
\text{T:}\quad & \Box P \to P \\
\text{D:}\quad & \Box P \to \Diamond P \quad \text{tai} \quad \Box P \to \neg\Box\neg P \\
\text{5:}\quad & \neg\Box P \to \Box\neg\Box P \\
\text{MP:}\quad & \frac{P, P \to Q}{Q}
\end{aligned}$$

1. a)

1.	$\neg\Box P \to \Box\neg\Box P$	[5-aksiooma]
2.	$(\neg\Box P \to \Box\neg\Box P) \to (\neg\Box\neg\Box P \to \Box P)$	[Tautologia]
3.	$\neg\Box\neg\Box P \to \Box P$	[MP, 1, 2]
4.	$\Box\Box P$	[GP]
5.	$\Box\Box P \to \neg\Box\neg\Box P$	[D]
6.	$\neg\Box\neg\Box P$	[MP, 4, 5]
7.	$\Box P$	[MP, 6, 3]

b) **S4** on **KT4**.

1.	$\neg\bot$	[Tautologia]
2.	$\Box\bot \to \bot$	[T]
3.	$(\Box\bot \to \bot) \to (\neg\bot \to \neg\Box\bot)$	[Tautologia]
4.	$\neg\bot \to \neg\Box\bot$	[MP, 2, 3]
5.	$\neg\Box\bot$	[MP, 1, 4]

2. a) Huomataan, että

$$\Sigma \vdash \emptyset \Longrightarrow \neg\big(\top \wedge A \wedge B \wedge \neg(A \wedge B)\big),$$
$$\Sigma \vdash \emptyset \Longrightarrow \neg\big(\top \wedge \neg A \wedge (A \wedge B)\big)$$

ja

$$\Sigma \vdash \emptyset \Longrightarrow \neg\big(\top \wedge \neg B \wedge (A \wedge B)\big),$$

koska lauseet $\neg\big(\top \wedge A \wedge B \wedge \neg(A \wedge B)\big)$, $\neg\big(\top \wedge \neg A \wedge (A \wedge B)\big)$ ja $\neg\big(\top \wedge \neg B \wedge (A \wedge B)\big)$ ovat tautologioita. Siten lausejoukot $\{A, B, \neg(A \wedge B)\}$, $\{\neg A, (A \wedge B)\}$ ja $\{\neg B, (A \wedge B)\}$ ovat Σ-epäkonsistentteja.

Tarkastellaan Σ-maksimaalista lausejoukkoa Δ.

Oletetaan, että $A \in \Delta$ ja $B \in \Delta$, mutta $A \wedge B \notin \Delta$. Koska Δ on Σ-maksimaalinen, seuraa, että $\neg(A \wedge B) \in \Delta$. Nyt kuitenkin Δ:lla olisi Σ-epäkonsistentti osajoukko $\{A, B, \neg(A \wedge B)\}$, mikä on mahdotonta, koska Δ on Σ-konsistentti (jolloin myös sen kaikki osajoukot ovat Σ-konsistentteja). On siis oltava myös $A \wedge B \in \Delta$. Jos taas olisi $A \wedge B \in \Delta$ ja $A \notin \Delta$ tai $B \notin \Delta$, niin silloin Δ:n Σ-maksimaalisuudesta seuraisi $\neg A \in \Delta$ tai $\neg B \in \Delta$, ja Δ:lla olisi Σ-epäkonsistentti osajoukko $\{\neg A, A \wedge B\}$ tai $\{\neg B, A \wedge B\}$, mikä on jälleen mahdotonta, koska Δ on Σ-konsistentti. On siis oltava $A \in \Delta$ ja $B \in \Delta$. Yllä olevan perusteella todetaan, että $A \wedge B \in \Delta$ pätee, jos ja vain, jos sekä $A \in \Delta$ että $B \in \Delta$ ovat voimassa.

b) Todetaan, että

$$\Sigma \vdash \emptyset \Longrightarrow \neg\big(\top \wedge \neg A \wedge \neg(A \to B)\big),$$
$$\Sigma \vdash \emptyset \Longrightarrow \neg\big(\top \wedge B \wedge \neg(A \to B)\big),$$

ja

$$\Sigma \vdash \emptyset \Longrightarrow \neg\big(\top \wedge A \wedge \neg B \wedge (A \to B)\big),$$

koska nuolien oikealla puolella olevat lauseet ovat tautologioita. Seuraa siis, että lausejoukot $\{\neg A, \neg(A \to B)\}$, $\{B, \neg(A \to B)\}$ ja $\{A, \neg B, A \to B\}$ ovat Σ-epäkonsistentteja. Nyt tulos

$$A \to B \in \Delta \text{ joss } A \notin \Delta \text{ tai } B \in \Delta$$

voidaan todistaa vastaavalla tavalla kuin a-kohdassa.

c) Vastaavasti

$$\Sigma \vdash \emptyset \Longrightarrow \neg\big(\top \wedge A \wedge \neg(A \vee B)\big),$$
$$\Sigma \vdash \emptyset \Longrightarrow \neg\big(\top \wedge B \wedge \neg(A \vee B)\big),$$

ja

$$\Sigma \vdash \emptyset \Longrightarrow \neg\big(\top \wedge \neg A \wedge \neg B \wedge (A \vee B)\big)$$

ja $A \vee B \in \Delta$, jos ja vain, jos $A \in \Delta$ tai $B \in \Delta$.