

Logiikka tietotekniikassa: erityiskysymyksiä I  
 Laskuharjoitus 4  
 Ratkaisut

Aksiooma  $K$ :

$$K: \quad \Box(P \rightarrow Q) \rightarrow (\Box P \rightarrow \Box Q)$$

Päätelysäännöt:

$$\text{MP: } \frac{P, P \rightarrow Q}{Q}$$

$$\text{N: } \frac{P}{\Box P}$$

1. a) Oletetaan, että kehys  $\mathcal{F} = \langle S, R \rangle$  ei ole sarjallinen. Olkoon  $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$  kehykseen  $\mathcal{F}$  perustuva malli. Mallissa  $\mathcal{M}$  on oltava ainakin yksi maailma, jolla ei ole yhtään  $R$ -seuraajaa, koska  $\mathcal{M}$  perustuu ei-sarjalliseen kehykseen. Olkoon siis  $s \in S$  jokin maailma, jolle pätee  $\forall t \in S : (s, t) \notin R$ . Silloin  $\mathcal{M}, s \Vdash \Box P$  pätee, mutta samalla myös  $\mathcal{M}, s \not\vdash \Diamond P$  pätee, joten  $\mathcal{M}, s \not\vdash \Box P \rightarrow \Diamond P$ . Tällöin  $\Box P \rightarrow \Diamond P$  ei ole pätevä mallissa  $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$ .
- b) Oletetaan, että kehys  $\mathcal{F} = \langle S, R \rangle$  on heikosti tiheä, mutta lause  $\Box\Box P \rightarrow \Box P$  ei ole pätevä kehyksessä. On siis olemassa kehykseen  $\mathcal{F}$  perustuva malli  $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$  ja maailma  $s \in S$  siten, että  $\mathcal{M}, s \not\vdash \Box\Box P \rightarrow \Box P$ . Tällöin  $\mathcal{M}, s \Vdash \Box\Box P$ , mutta  $\mathcal{M}, s \not\vdash \Box P$ . Jälkimmäisestä vaatimuksesta seuraa, että on olemassa  $t \in S$  siten, että  $\langle s, t \rangle \in R$  ja  $\mathcal{M}, t \not\vdash P$ . Oletuksen nojalla kehys  $\mathcal{F}$  on heikosti tiheä, joten on olemassa  $u \in S$ , jolle  $\langle s, u \rangle \in R$  ja  $\langle u, t \rangle \in R$ . Koska  $\langle u, t \rangle \in R$  ja  $\mathcal{M}, t \not\vdash P$ , seuraa siitä, että  $\mathcal{M}, u \not\vdash \Box P$ . Nyt  $\langle s, u \rangle \in R$  ja  $\mathcal{M}, u \not\vdash \Box P$ , joten täytyy olla niin, että  $\mathcal{M}, s \not\vdash \Box\Box P$ . Tästä seuraa ristiriita, sillä edellä oletettiin, että  $\mathcal{M}, s \Vdash \Box\Box P$ . Lause  $\Box\Box P \rightarrow \Box P$  on siis pätevä kehyksessä  $\mathcal{F}$ .

2. a)

1.  $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$  [Tautologia]
2.  $\Box(P \rightarrow (Q \rightarrow P))$  [N, 1]
3.  $\Box(P \rightarrow (Q \rightarrow P)) \rightarrow (\Box P \rightarrow \Box(Q \rightarrow P))$  [K]
4.  $\Box P \rightarrow \Box(Q \rightarrow P)$  [MP, 2, 3]

b)

1.  $\Box(P \rightarrow Q)$  [GP]
2.  $(P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$  [Tautologia]
3.  $\Box((P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P))$  [N, 2]
4.  $\Box((P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)) \rightarrow$   
 $(\Box(P \rightarrow Q) \rightarrow \Box(\neg Q \rightarrow \neg P))$  [K]
5.  $\Box(P \rightarrow Q) \rightarrow \Box(\neg Q \rightarrow \neg P)$  [MP, 3, 4]
6.  $\Box(\neg Q \rightarrow \neg P)$  [MP, 1, 5]
7.  $\Box(\neg Q \rightarrow \neg P) \rightarrow (\Box \neg Q \rightarrow \Box \neg P)$  [K]
8.  $\Box \neg Q \rightarrow \Box \neg P$  [MP, 6, 7]

3. a)

1.  $P \rightarrow Q$  [GP]
2.  $\neg Q \rightarrow P$  [GP]
3.  $(P \rightarrow Q) \rightarrow ((\neg Q \rightarrow P) \rightarrow Q)$  [Tautologia]
4.  $(\neg Q \rightarrow P) \rightarrow Q$  [MP, 1, 3]
5.  $Q$  [MP, 2, 4]
6.  $\Box Q$  [N, 5]

---

7.  $\neg Q \vee S$  [LP]
8.  $(\neg Q \vee S) \rightarrow (Q \rightarrow S)$  [Tautologia]
9.  $Q \rightarrow S$  [MP, 7, 8]
10.  $S$  [MP, 5, 9]
11.  $\Box Q \rightarrow (S \rightarrow \Box Q \wedge S)$  [Tautologia]
12.  $S \rightarrow \Box Q \wedge S$  [MP, 6, 11]
13.  $\Box Q \wedge S$  [MP, 10, 12]

b)

1.	$Q \rightarrow \neg P$	[GP]
2.	$\Box(Q \rightarrow \neg P)$	[N, 1]
3.	$\Box(Q \rightarrow \neg P) \rightarrow (\Box Q \rightarrow \Box \neg P)$	[K]
4.	$\Box Q \rightarrow \Box \neg P$	[MP, 2, 3]
5.	$\Diamond Q \rightarrow \Box Q$	[GP]
6.	$(\Diamond Q \rightarrow \Box Q) \rightarrow$ $((\Box Q \rightarrow \Box \neg P) \rightarrow (\Diamond Q \rightarrow \Box \neg P))$	[Tautologia]
7.	$(\Box Q \rightarrow \Box \neg P) \rightarrow (\Diamond Q \rightarrow \Box \neg P)$	[MP, 5, 6]
8.	$\Diamond Q \rightarrow \Box \neg P$	[MP, 4, 7]
9.	$(\neg \Box \neg Q \rightarrow \Box \neg P) \rightarrow (\neg \Box \neg P \rightarrow \Box \neg Q)$	[Tautologia]
10.	$\neg \Box \neg P \rightarrow \Box \neg Q$	[MP, 8, 9]
<hr/>		
11.	$\Diamond P$	[LP]
12.	$\Box \neg Q$	[MP, 10, 11]