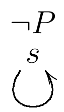
T-79.146 **Kevät 2005**
Logiikka tietotekniikassa: erityiskysymyksiä I
Laskuharjoitus 3
Ratkaisut

1. Vastaesimerkiksi kelpaa malli

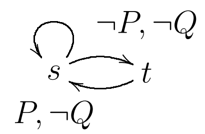
   $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$, missä $S = \{s\}$, $R = \{\langle s, s\rangle\}$, ja $v(s, P) = \text{false}$.

   $\mathcal{M} \models \Box P \to \Diamond P$ pätee (koska $\mathcal{M}, s \not\Vdash \Box P$), ja $\mathcal{M}, s \Vdash \Box\neg P$ pätee myös, koska $\langle s, s\rangle \in R$, $\mathcal{M}, s \Vdash \neg P$, eikä s:llä ole muita seuraajia R-relaatiossa. Edelleen myös $\mathcal{M}, s \Vdash \Box\Box\neg P$ pätee. Koska kuitenkin $\mathcal{M}, s \not\Vdash \Box P$ (eikä s:llä ole muita seuraajia R-relaatiossa), ei $\mathcal{M}, s \Vdash \Diamond\Box P$ päde. Siis $\mathcal{M}$ on vastaesimerkki.

   (Vastaesimerkit eivät yleisesti ole yksikäsitteisiä: samalla tavalla voitaisiin tarkistaa, että myös mallit $\mathcal{M}' = \langle S', R', v'\rangle$, missä $S' = \{s', t'\}$, $R' = \{\langle s', t'\rangle, \langle t', s'\rangle\}$ ja $v(s', P) = v(t', P) = \text{false}$ ja $\mathcal{M}'' = \langle S'', R'', v''\rangle$, $S'' = \{s'', t'', u''\}$, $R'' = \{\langle s'', t''\rangle, \langle t'', u''\rangle, \langle u'', t''\rangle\}$ ja $v''(s'', P) = v''(t'', P) = \text{true}$, $v''(u'', P) = \text{false}$, ovat vastaesimerkkejä loogiselle seuraavuudelle maailmoissa s' ja s'' vastaavasti.)

2. $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$, missä $S = \{s, t\}$, $R = \{\langle s, s\rangle, \langle s, t\rangle, \langle t, s\rangle\}$, $v(s, P) = \text{true}$ ja $v(s, Q) = v(t, P) = v(t, Q) = \text{false}$.

   $\mathcal{M}, s \Vdash \Diamond P \vee \Diamond Q$ ja $\mathcal{M}, t \Vdash \Diamond P \vee \Diamond Q$ pätevät (koska $\mathcal{M}, s \Vdash P$, $\langle s, s\rangle \in R$ ja $\langle t, s\rangle \in R$), ja $\mathcal{M}, s \Vdash \neg\Box P$ pätee, sillä $\langle s, t\rangle \in R$ ja $\mathcal{M}, t \not\Vdash P$. Kuitenkin $\mathcal{M}, s \not\Vdash \Diamond Q$, sillä $\mathcal{M}, s' \not\Vdash Q$ kaikille $s' \in S$, joille $\langle s, s'\rangle \in R$. Siis $\mathcal{M}$ on (eräs) vastaesimerkki.

3. Oletetaan, että

   $$\Sigma \cup \{P\} \not\models_{\mathbf{L}} \Upsilon \Longrightarrow Q.$$

   Silloin on olemassa $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$ siten, että

   $$\mathcal{M} \models \Sigma \cup \{P\}$$

ja

$$\exists s \in S : \quad \forall \varphi \in \Upsilon : \mathcal{M}, s \Vdash \varphi, \text{ mutta } \mathcal{M}, s \nVdash Q.$$

Erityisesti $\mathcal{M}, t \Vdash P$ kaikilla $t \in S$, joten

$$\mathcal{M}, s \Vdash P \wedge \Box P \wedge \Box\Box P \wedge \Box\Box\Box P.$$

Koska myös $\mathcal{M} \models \Sigma$ pätee, seuraa, että

$$\Sigma \not\models_{\mathbf{L}} \Upsilon \Longrightarrow P \wedge \Box P \wedge \Box\Box P \wedge \Box\Box\Box P \to Q.$$

4. a) Oletetaan, että kehys $\mathcal{F} = \langle S, R \rangle$ on transitiivinen, mutta lause $\Box P \to \Box\Box P$ ei ole pätevä kehyksessä. On siis olemassa kehykseen $\mathcal{F}$ perustuva malli $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$ ja maailma $s \in S$ siten, että $\mathcal{M}, s \nVdash \Box P \to \Box\Box P$. Tällöin $\mathcal{M}, s \Vdash \Box P$, mutta $\mathcal{M}, s \nVdash \Box\Box P$. Jälkimmäisestä vaatimuksesta seuraa, että on olemassa $t \in S$ siten, että $\langle s, t \rangle \in R$ ja $\mathcal{M}, t \nVdash \Box P$. Edelleen päätellään, että on olemassa $u \in S$, jolle $\langle t, u \rangle \in R$ ja $\mathcal{M}, u \nVdash P$. Koska $\langle s, t \rangle \in R$ ja $\langle t, u \rangle \in R$, seuraa nyt kehyksen $\mathcal{F}$ transitiivisuudesta, että $\langle s, u \rangle \in R$. Koska siis $\langle s, u \rangle \in R$ ja $\mathcal{M}, u \nVdash P$, $\mathcal{M}, s \nVdash \Box P$, mistä seuraa ristiriita, sillä edellä oletettiin, että $\mathcal{M}, s \Vdash \Box P$. Lause $\Box P \to \Box\Box P$ on siis pätevä kehyksessä.

   b) Oletetaan, että kehys $\mathcal{F} = \langle S, R \rangle$ on euklidinen. Olkoon $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$ kehykseen $\mathcal{F}$ perustuva malli ja $s \in S$ jokin sen maailma, jolle pätee $\mathcal{M}, s \Vdash \neg\Box P$. Silloin

$$\mathcal{M}, s \nVdash \Box P,$$

joten

$$\exists t \in S : \langle s, t \rangle \in R \quad \text{ja} \quad \mathcal{M}, t \nVdash P.$$

Oletetaan, että $\langle s, u \rangle \in R$. Koska $\langle s, t \rangle \in R$, kehyksen euklidisuudesta seuraa, että $\langle u, t \rangle \in R$. Siis

$$\mathcal{M}, u \nVdash \Box P,$$

ja

$$\mathcal{M}, u \Vdash \neg\Box P.$$

Koska u on mielivaltainen s:n seuraaja, $\mathcal{M}, s \Vdash \Box\neg\Box P$, ja on todistettu

$$\mathcal{M}, s \Vdash \neg\Box P \to \Box\neg\Box P.$$

Siten $\neg\Box P \to \Box\neg\Box P$ on pätevä mallissa $\mathcal{M}$, ja koska $\mathcal{M}$ on mielivaltainen kehykseen $\mathcal{F}$ perustuva malli, $\neg\Box P \to \Box\neg\Box P$ on pätevä kehyksessä $\mathcal{F}$.

5. Oletetaan, että $\mathcal{F} = \langle S, R \rangle$ on refleksiivinen ja euklidinen. Jos sRt pätee, niin refleksiivisyyden perusteella myös sRs pätee. Euklidisuudesta seuraa nyt, että myös tRs pätee, joten kehys on symmetrinen.

   Oletetaan sitten, että sRt ja tRu ovat voimassa. Symmetrisyyden perusteella tRs pätee, ja euklidisuudesta puolestaan seuraa, että sRu pätee. Kehys on siis transitiivinen.