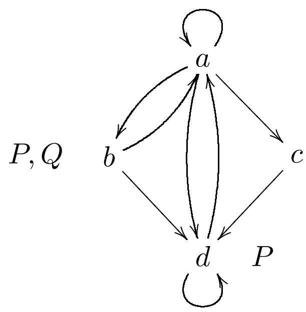
T-79.146 Kevät 2005

Logiikka tietotekniikassa: erityiskysymyksiä I
Laskuharjoitus 12
Ratkaisut

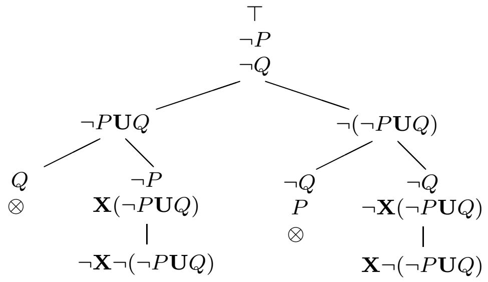
1. $\mathcal{M}$:



Lauseen $\mathbf{X}(\neg P\mathbf{U}Q)$ sulkeuma:

$$\mathrm{CL}\big(\mathbf{X}(\neg P\mathbf{U}Q)\big) = \big\{\mathbf{X}(\neg P\mathbf{U}Q), \neg\mathbf{X}(\neg P\mathbf{U}Q), \neg P\mathbf{U}Q, \mathbf{X}\neg(\neg P\mathbf{U}Q),$$
$$\neg(\neg P\mathbf{U}Q), \neg P, Q, \neg\mathbf{X}\neg(\neg P\mathbf{U}Q), P, \neg Q\big\}$$

Muodostetaan atomit. Koska $v(a,P) = v(a,Q) =$ false, saadaan tilan a perusteella taulu



Taulun avoimista haaroista saadaan kelvolliset lausejoukot

$$K_1 = \big\{\top, \neg P, \neg Q, \neg P\mathbf{U}Q, \mathbf{X}(\neg P\mathbf{U}Q), \neg\mathbf{X}\neg(\neg P\mathbf{U}Q)\big\}$$
$$K_2 = \big\{\top, \neg P, \neg Q, \neg(\neg P\mathbf{U}Q), \neg\mathbf{X}(\neg P\mathbf{U}Q), \mathbf{X}\neg(\neg P\mathbf{U}Q)\big\}$$

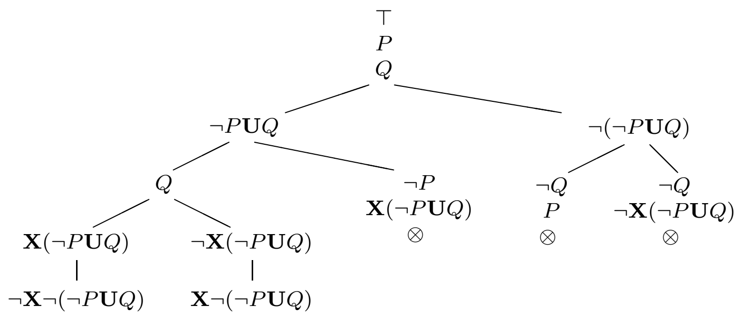
Tilasta a ja näistä lausejoukoista saadaan siten atomit (a, K_1) ja (a, K_2). (Lausejoukot K_1 ja K_2 ovat siis suurimmat mahdolliset $\mathrm{CL}\big(\mathbf{X}(\neg P\mathbf{U}Q)\big)$:n ristiriidattomat[1] osajoukot, jotka ovat yhtäpitäviä

[1]Lausejoukko K on ristiriitainen, jos $\varphi, \neg\varphi \in K$ jollekin lauseelle φ.

atomilauseiden valuaation kanssa tilassa a: minkä tahansa lauseen $\varphi \in \mathrm{CL}\big(\mathbf{X}(\neg P\mathbf{U}Q)\big) \setminus K_i$ lisääminen joukkoon K_i, $i \in \{1,2\}$, tekisi lausejoukon ristiriitaiseksi.)

Koska atomilauseilla P ja Q on tilassa c sama valuaatio kuin tilassa a, tilan c perusteella saadaan atomit (c, K_1) ja (c, K_2).

Muodostetaan taulu tilan b atomilauseiden valuaation perusteella:

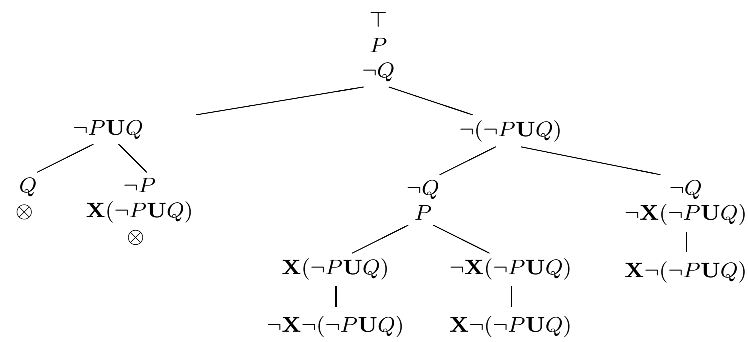


Taulun avoimista haaroista saadaan lausejoukot

$$K_3 = \big\{\top, P, Q, \neg P\mathbf{U}Q, \mathbf{X}(\neg P\mathbf{U}Q), \neg\mathbf{X}\neg(\neg P\mathbf{U}Q)\big\}$$
$$K_4 = \big\{\top, P, Q, \neg P\mathbf{U}Q, \neg\mathbf{X}(\neg P\mathbf{U}Q), \mathbf{X}\neg(\neg P\mathbf{U}Q)\big\}$$

Tilan b perusteella saadaan siis atomit (b, K_3) ja (b, K_4).

Muodostetaan vielä taulu tilan d suhteen:



Nyt saadaan lausejoukot

$$K_5 = \big\{\top, P, \neg Q, \neg(\neg P\mathbf{U}Q), \mathbf{X}(\neg P\mathbf{U}Q), \neg\mathbf{X}\neg(\neg P\mathbf{U}Q)\big\}$$
$$K_6 = \big\{\top, P, \neg Q, \neg(\neg P\mathbf{U}Q), \neg\mathbf{X}(\neg P\mathbf{U}Q), \mathbf{X}\neg(\neg P\mathbf{U}Q)\big\}$$

(lausejoukko K_6 saadaan kahdesta taulun avoimesta haarasta). Tilan d perusteella saadaan siis atomit (d, K_5) ja (d, K_6).

Muodostetaan graafi $G = (N, E)$, jonka solmujen joukko N koostuu kaikista edellä määritetyistä atomeista, ts.

$$N = \big\{(a, K_1), (a, K_2), (b, K_3), (b, K_4), (c, K_1), (c, K_2), (d, K_5), (d, K_6)\big\}$$

ja jonka kaaret toteuttavat seuraavan ehdon: atomista (s, K) on kaari atomiin (s', K'), jos ja vain, jos

(a) $\langle s, s' \rangle \in R$ (mallissa $\mathcal{M}$) ja

(b) kaikille K:n muotoa $\mathbf{X}\varphi$ oleville lauseille pätee $\varphi \in K'$.

Jälkimmäisen ehdon tarkistamiseksi voidaan ensin muodostaa K_i-joukkojen välille "yhteensopivuusrelaatio", joka voidaan esittää taulukkona seuraavasti:

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6
K_1	$\times$		$\times$	$\times$		
K_2		$\times$			$\times$	$\times$
K_3	$\times$		$\times$	$\times$		
K_4		$\times$			$\times$	$\times$
K_5	$\times$		$\times$	$\times$		
K_6		$\times$			$\times$	$\times$

Taulukon i:nnen rivin j:nnessä sarakkeessa on rasti, jos ja vain, jos kaikille lauseille $\mathbf{X}\varphi \in K_i$ pätee $\varphi \in K_j$: esimerkiksi pari (K_1, K_3) toteuttaa ehdon, koska $\mathbf{X}(\neg P\mathbf{U}Q) \in K_1$ on K_1:n ainoa muotoa $\mathbf{X}\varphi$ oleva lause ja $\neg P\mathbf{U}Q \in K_3$.

Ehdot (a) ja (b) voidaan nyt tarkistaa relaation R ja yllä olevan taulukon avulla. Esimerkiksi atomista (b, K_3) voisi relaatiota R koskevan ehdon (a) perusteella olla kaari mihin tahansa atomeista $\big\{(a, K_1), (a, K_2), (d, K_5), (d, K_6)\big\}$; koska K-joukkojen välinen ehto ei kuitenkaan yllä olevan taulukon perusteella päde pareille (K_3, K_2), (K_3, K_5) ja (K_3, K_6), jäljelle jää ainoastaan kaari $\big\langle (b, K_3), (a, K_1) \big\rangle$.

Graafiksi G saadaan

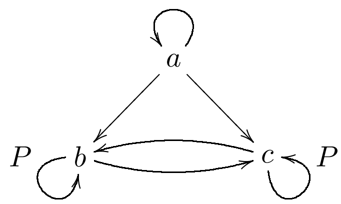
$$\begin{tikzcd}
 & & & (c, K_2) \arrow[dl] \arrow[d] \\
(c, K_1) & (a, K_1) \arrow[l] \arrow[loop above] \arrow[dl, bend right] \arrow[dr] & (d, K_5) \arrow[l] & (d, K_6) \arrow[l] \arrow[loop above] \arrow[d, bend right] \\
(b, K_3) \arrow[ur, bend right] & & (b, K_4) \arrow[u] \arrow[ur] \arrow[r] & (a, K_2) \arrow[ul] \arrow[u, bend right] \arrow[loop below] \arrow[uu, bend right]
\end{tikzcd}$$

Lauseen $\mathbf{EX}(\neg P\mathbf{U}Q)$ toteutuvuuden määrittämiseksi tilassa a tutkitaan, onko graafissa G polkua, joka alkaa jostakin atomista (a, K) $(K \in \{K_1, \ldots, K_6\})$ siten, että lause $\mathbf{X}(\neg P\mathbf{U}Q)$ kuuluu joukkoon K, ja polku johtaa johonkin itsetoteutuvaan ei-triviaaliin vahvasti kytkettyyn komponenttiin. (Vahvasti kytketty komponentti $C \subseteq N$ on itsetoteutuva, jos kaikkien atomien $(s, K) \in C$ kaikille joukkoon K kuuluville muotoa $\varphi\mathbf{U}\psi$ oleville lauseille on olemassa atomi $(s', K') \in C$ siten, että $\psi \in K'$.)

Graafin G ainoa ei-triviaali vahvasti kytketty komponentti on $C = \big\{(a, K_1), (a, K_2), (b, K_3), (b, K_4), (c, K_2), (d, K_5), (d, K_6)\big\}$. Tämä komponentti on myös itsetoteutuva, sillä ainoa C:n solmuissa esiintyvä muotoa $\varphi\mathbf{U}\psi$ oleva lause on $\neg P\mathbf{U}Q$, ja C sisältää esim. atomin (b, K_3), jolle pätee $Q \in K_3$.

Nähdään, että komponentti C on saavutettavissa esimerkiksi atomista (a, K_1) (koska $(a, K_1) \in C$)). Koska $\mathbf{X}(\neg P\mathbf{U}Q) \in K_1$, seuraa, että $\mathcal{M}, a \models \mathbf{EX}(\neg P\mathbf{U}Q)$ pätee.

2. $\mathcal{M}$:



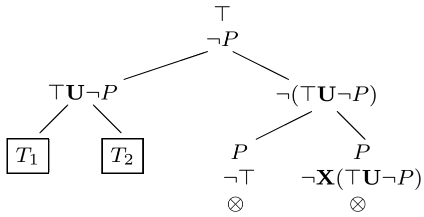
$\mathcal{M}, a \models \mathbf{AFG}P$ pätee, jos ja vain, jos $\mathcal{M}, a \models \neg\mathbf{E}\neg\mathbf{FG}P$ pätee, jos ja vain, jos $\mathcal{M}, a \not\models \mathbf{E}\neg\mathbf{FG}P$. Tutkitaan siis, päteekö $\mathcal{M}, a \models \mathbf{E}\neg\mathbf{FG}P$. Kirjoitetaan lause $\neg\mathbf{FG}P$ käyttämällä ainoastaan $\mathbf{X}$- ja $\mathbf{U}$-temporaalikonnektiiveja:

$$\begin{aligned}
\neg\mathbf{FG}P &\equiv \neg\mathbf{F}\neg\mathbf{F}\neg P \\
&\equiv \neg\mathbf{F}\neg(\top\mathbf{U}\neg P) \\
&\equiv \neg\big(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\big)
\end{aligned}$$

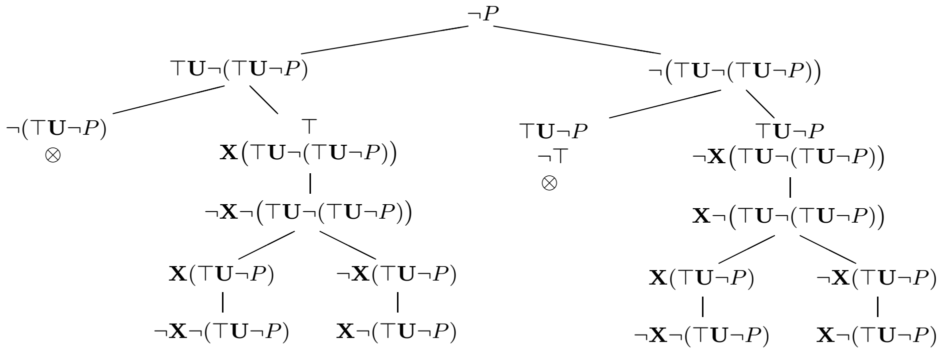
Lauseen $\neg\big(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\big)$ sulkeuma:

$$\begin{aligned}
\mathrm{CL}\big(\neg\big(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\big)\big) = \big\{&\neg\big(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\big), \top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P), \\
&\top, \neg(\top\mathbf{U}\neg P), \mathbf{X}\big(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\big), \neg\top, \\
&\top\mathbf{U}\neg P, \neg\mathbf{X}\big(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\big), \neg P, \\
&\mathbf{X}(\top\mathbf{U}\neg P), \mathbf{X}\neg\big(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\big), P, \\
&\neg\mathbf{X}(\top\mathbf{U}\neg P), \neg\mathbf{X}\neg\big(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\big), \\
&\mathbf{X}\neg(\top\mathbf{U}\neg P), \neg\mathbf{X}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\big\}
\end{aligned}$$

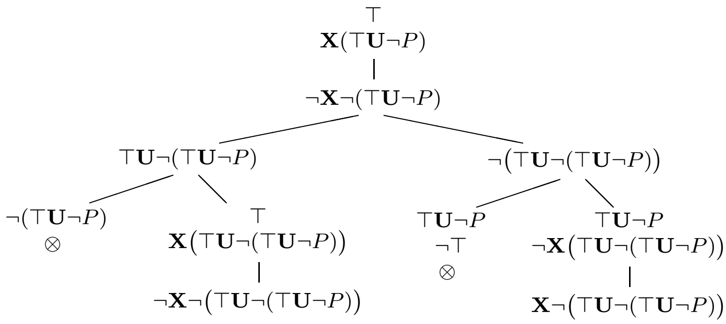
Muodostetaan atomit. Koska $v(a, P) = \text{false}$, saadaan tilan a perusteella taulu



jossa haara T_1 on



ja haara T_2 on

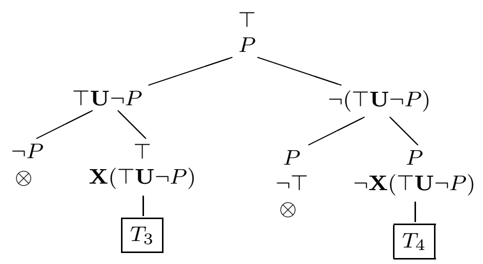


Taulun avoimien haarojen perusteella saadaan nyt lausejoukot

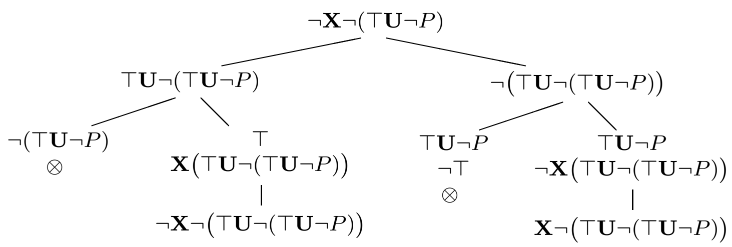
$$\begin{aligned}
K_1 = \{&\top, \neg P, \top\mathbf{U}\neg P, \top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P), \mathbf{X}\big(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\big),\\
&\neg\mathbf{X}\neg\big(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\big), \mathbf{X}(\top\mathbf{U}\neg P), \neg\mathbf{X}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\}\\
K_2 = \{&\top, \neg P, \top\mathbf{U}\neg P, \top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P), \mathbf{X}\big(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\big),\\
&\neg\mathbf{X}\neg\big(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\big), \neg\mathbf{X}(\top\mathbf{U}\neg P), \mathbf{X}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\}\\
K_3 = \{&\top, \neg P, \top\mathbf{U}\neg P, \neg\big(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\big), \neg\mathbf{X}\big(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\big),\\
&\mathbf{X}\neg\big(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\big), \mathbf{X}(\top\mathbf{U}\neg P), \neg\mathbf{X}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\}\\
K_4 = \{&\top, \neg P, \top\mathbf{U}\neg P, \neg\big(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\big), \neg\mathbf{X}\big(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\big),\\
&\mathbf{X}\neg\big(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\big), \neg\mathbf{X}(\top\mathbf{U}\neg P), \mathbf{X}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
K_5 = \big\{&\top, \neg P, \top\mathbf{U}\neg P, \mathbf{X}(\top\mathbf{U}\neg P), \neg\mathbf{X}\neg(\top\mathbf{U}\neg P), \top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P),\\
&\mathbf{X}\big(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\big), \neg\mathbf{X}\neg\big(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\big)\big\}\\
K_6 = \big\{&\top, \neg P, \top\mathbf{U}\neg P, \mathbf{X}(\top\mathbf{U}\neg P), \neg\mathbf{X}\neg(\top\mathbf{U}\neg P), \neg\big(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\big),\\
&\neg\mathbf{X}\big(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\big), \mathbf{X}\neg\big(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\big)\big\}
\end{aligned}
$$

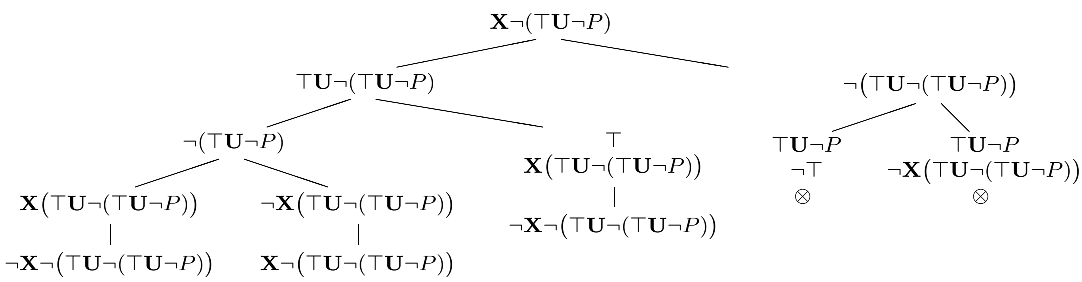
Näin saadaan atomit (a, K_1), (a, K_2), (a, K_3), (a, K_4), (a, K_5) ja (a, K_6). Koska $v(b, P) = v(c, P) =$ true, tilojen b:n ja c:n perusteella saadaan taulu



jossa haara T_3 on



ja haara T_4 on



Näin saadaan lausejoukot

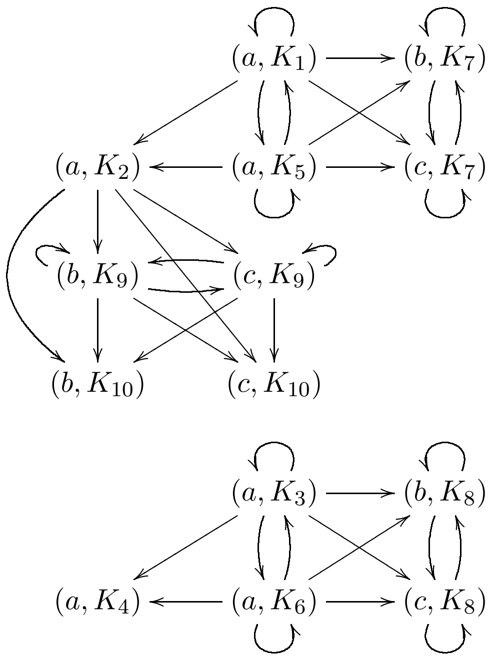
$$
\begin{aligned}
K_7 = \big\{&\top, P, \top\mathbf{U}\neg P, \mathbf{X}(\top\mathbf{U}\neg P), \neg\mathbf{X}\neg(\top\mathbf{U}\neg P), \top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P),\\
&\mathbf{X}\big(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\big), \neg\mathbf{X}\neg\big(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\big)\big\}\\
K_8 = \big\{&\top, P, \top\mathbf{U}\neg P, \mathbf{X}(\top\mathbf{U}\neg P), \neg\mathbf{X}\neg(\top\mathbf{U}\neg P), \neg\big(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\big),\\
&\neg\mathbf{X}\big(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\big), \mathbf{X}\neg\big(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\big)\big\}\\
K_9 = \big\{&\top, P, \neg(\top\mathbf{U}\neg P), \neg\mathbf{X}(\top\mathbf{U}\neg P), \mathbf{X}\neg(\top\mathbf{U}\neg P), \top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P),\\
&\mathbf{X}\big(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\big), \neg\mathbf{X}\neg\big(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\big)\big\}\\
K_{10} = \big\{&\top, P, \neg(\top\mathbf{U}\neg P), \neg\mathbf{X}(\top\mathbf{U}\neg P), \mathbf{X}\neg(\top\mathbf{U}\neg P), \top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P),\\
&\neg\mathbf{X}\big(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\big), \mathbf{X}\neg\big(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\big)\big\}
\end{aligned}
$$

(lausejoukko K_9 saadaan taulun kahdesta haarasta). Näin saadaan atomit (b, K_7), (b, K_8), (b, K_9), (b, K_{10}) sekä (c, K_7), (c, K_8), (c, K_9) ja (c, K_{10}).

K-joukkojen välinen ”yhteensopivuusrelaatio” on nyt seuraava:

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7	K_8	K_9	K_{10}
K_1	$\times$	$\times$			$\times$		$\times$			
K_2									$\times$	$\times$
K_3			$\times$	$\times$		$\times$		$\times$		
K_4										
K_5	$\times$	$\times$			$\times$		$\times$			
K_6			$\times$	$\times$		$\times$		$\times$		
K_7	$\times$	$\times$			$\times$		$\times$			
K_8			$\times$	$\times$		$\times$		$\times$		
K_9									$\times$	$\times$
K_{10}										

Graafi G:



G:n ei-triviaalit vahvasti kytketyt komponentit ovat

$$\begin{aligned} C_1 &= \big\{(a, K_1), (a, K_5)\big\} \\ C_2 &= \big\{(a, K_3), (a, K_6)\big\} \\ C_3 &= \big\{(b, K_7), (c, K_7)\big\} \\ C_4 &= \big\{(b, K_8), (c, K_8)\big\} \\ C_5 &= \big\{(b, K_9), (c, K_9)\big\} \end{aligned}$$

Näistä komponenteista C_2 ja C_5 ovat itsetoteutuvia. On siis tutkittava, onko jompikumpi näistä komponenteista saavutettavissa jostakin graafin solmusta (a, K), missä $\neg\big(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\big) \in K$. Koska lause $\neg\big(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\big)$ kuuluu esimerkiksi joukkoon K_6 ja C_2 on saavutettavissa solmusta (a, K_6) (koska $(a, K_6) \in C_2$), seuraa, että $\mathcal{M}, a \models \mathbf{E}\neg\mathbf{FG}P$ pätee. Siten $\mathcal{M}, a \models \mathbf{AFG}P$ *ei* päde mallissa $\mathcal{M}$.

3. Aloitetaan lauseen negaatiosta

$$\neg\Bigg(\Big(Q \vee \big(P \wedge \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q)\big)\Big) \to \mathbf{A}(P\mathbf{U}Q)\Bigg).$$

Muunnetaan lause positiiviseen normaalimuotoon:

$$\Big(Q \vee \big(P \wedge \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q)\big)\Big) \wedge \neg\mathbf{A}(P\mathbf{U}Q)$$
$$\Big(Q \vee \big(P \wedge \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q)\big)\Big) \wedge \mathbf{E}(\neg P\mathbf{B}Q)$$

Muodostetaan taulu. Aloitetaan OR-solmusta

$$D_0 = \Big\{ \Big(Q \vee \big(P \wedge \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q) \big) \Big) \wedge \mathbf{E}(\neg P\mathbf{B}Q) \Big\},$$

jonka AND-seuraajat ovat

$$\begin{aligned}
C_0 = \Big\{ & \Big(Q \vee \big(P \wedge \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q) \big) \Big) \wedge \mathbf{E}(\neg P\mathbf{B}Q), \\
& Q \vee \big(P \wedge \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q) \big), \mathbf{E}(\neg P\mathbf{B}Q), \\
& Q, \neg Q, \neg P \vee \mathbf{EXE}(\neg P\mathbf{B}Q), \neg P \Big\} \\
C_1 = \Big\{ & \Big(Q \vee \big(P \wedge \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q) \big) \Big) \wedge \mathbf{E}(\neg P\mathbf{B}Q), \\
& Q \vee \big(P \wedge \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q) \big), \mathbf{E}(\neg P\mathbf{B}Q), \\
& Q, \neg Q, \neg P \vee \mathbf{EXE}(\neg P\mathbf{B}Q), \mathbf{EXE}(\neg P\mathbf{B}Q) \Big\} \\
C_2 = \Big\{ & \Big(Q \vee \big(P \wedge \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q) \big) \Big) \wedge \mathbf{E}(\neg P\mathbf{B}Q), \\
& Q \vee \big(P \wedge \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q) \big), \mathbf{E}(\neg P\mathbf{B}Q), \\
& P \wedge \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q), P, \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q), \neg Q, \\
& \neg P \vee \mathbf{EXE}(\neg P\mathbf{B}Q), \neg P \Big\} \\
C_3 = \Big\{ & \Big(Q \vee \big(P \wedge \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q) \big) \Big) \wedge \mathbf{E}(\neg P\mathbf{B}Q), \\
& Q \vee \big(P \wedge \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q) \big), \mathbf{E}(\neg P\mathbf{B}Q), \\
& P \wedge \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q), P, \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q), \neg Q, \\
& \neg P \vee \mathbf{EXE}(\neg P\mathbf{B}Q), \mathbf{EXE}(\neg P\mathbf{B}Q) \Big\}
\end{aligned}$$

Solmut C_0, C_1 ja C_2 voidaan karsia pois, koska ne sisältävät jonkin lauseen ja sen negaation. (Ristiriitaisten AND-solmujen karsintasääntöjä voidaan siis työmäärän vähentämiseksi soveltaa jo AND-solmuja muodostettaessa; voidaan osoittaa, että millään solmulla, joka saataisiin edelleen generoimalla täydellisesti kaikki solmujen C_0, C_1 tai C_2 OR-seuraajat, näiden AND-seuraajat jne., ei ole merkitystä tutkittavana olevan lauseen toteutuvuustarkistuksen kannalta lopullisessa taulussa. Tämä johtuu siitä, että mikään näin syntyvistä solmuista ei sisällä tutkittavana olevaa lausetta, eikä mikään jostakin muusta AND-solmusta lähtevä tulevaisuuspolku voi kulkea ristiriitaisen AND-solmun kautta.)

Koska solmu C_3 sisältää lauseet $\mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q)$ ja $\mathbf{EXE}(\neg P\mathbf{B}Q)$, solmulle C_3 saadaan OR-seuraaja $D_1 = \big\{ \mathbf{A}(P\mathbf{U}Q), \mathbf{E}(\neg P\mathbf{B}Q) \big\}$.

D_1:n AND-seuraajat:

$$\begin{aligned}
C_4 &= D_1 \cup \big\{Q, \neg Q, \neg P \vee \mathbf{EXE}(\neg P\mathbf{B}Q), \neg P\big\} \\
C_5 &= D_1 \cup \big\{Q, \neg Q, \neg P \vee \mathbf{EXE}(\neg P\mathbf{B}Q), \mathbf{EXE}(\neg P\mathbf{B}Q)\big\} \\
C_6 &= D_1 \cup \big\{P \wedge \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q), P, \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q), \neg Q, \\
&\qquad\qquad \neg P \vee \mathbf{EXE}(\neg P\mathbf{B}Q), \neg P\big\} \\
C_7 &= D_1 \cup \big\{P \wedge \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q), P, \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q), \neg Q, \\
&\qquad\qquad \neg P \vee \mathbf{EXE}(\neg P\mathbf{B}Q), \mathbf{EXE}(\neg P\mathbf{B}Q)\big\}
\end{aligned}$$

Koska solmut C_4, C_5 ja C_6 ovat ristiriitaisia, ne voidaan karsia pois. Jäljelle jää solmu C_7, jolle saadaan OR-seuraaja $\big\{\mathbf{A}(P\mathbf{U}Q), \mathbf{E}(\neg P\mathbf{B}Q)\big\} = D_1$.

AND-solmu C_7 karsitaan pois, sillä tämä solmu sisältää tulevaisuuslauseen $\mathbf{A}(P\mathbf{U}Q)$, joka ei toteudu solmussa. Tämä johtuu siitä, että taulusta ei voida erottaa solmusta C_7 lähtevää luentokalvoissa esitetyt ehdot täyttävää asyklistä aligraafia, jonka kaikki lehtisolmut sisältäisivät lauseen Q, ja lause P olisi mukana kaikissa muissa aligraafin AND-solmuissa.

Solmun C_7 poistamisen jälkeen voidaan karsintasääntöjen perusteella poistaa järjestyksessä solmut D_1, C_3 ja D_0. Koska jäljelle jäävässä taulussa ei ole yhtään AND-solmua, joka sisältäisi lauseen

$$\Big(Q \vee \big(P \wedge \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q)\big)\Big) \wedge \mathbf{E}(\neg P\mathbf{B}Q),$$

seuraa, että lause on toteutumaton. Siten lauseen negaatio (alkuperäinen lause) on pätevä.

4. Muunnetaan lause ensin positiiviseen normaalimuotoon.

$$\begin{gathered}
\mathbf{GF}P \to \mathbf{GF}\neg P \\
\neg\mathbf{GF}P \vee \mathbf{GF}\neg P \\
\mathbf{FG}\neg P \vee \mathbf{GF}\neg P
\end{gathered}$$

Korvataan sitten lauseessa esiintyvät LTL:n konnektiivit **F** ja **G** CTL:n konnektiiveilla **AF** ja **AG**, jolloin saadaan CTL-lause

$$\mathbf{AFAG}\neg P \vee \mathbf{AGAF}\neg P.$$

Tämä CTL-lause on toteutuva, jos ja vain, jos alkuperäinen LTL-lause on toteutuva. Tutkitaan siis taulumenetelmällä, onko CTL-lause toteutuva. Taulun juurena on OR-solmu

$$D_0 = \{\mathbf{AFAG}\neg P \vee \mathbf{AGAF}\neg P\}.$$

D_0:n AND-seuraajat:

$$\begin{aligned}
C_0 &= \big\{\mathbf{AFAG}\neg P \vee \mathbf{AGAF}\neg P, \mathbf{AFAG}\neg P, \mathbf{AG}\neg P, \neg P, \mathbf{AXAG}\neg P\big\}\\
C_1 &= \big\{\mathbf{AFAG}\neg P \vee \mathbf{AGAF}\neg P, \mathbf{AFAG}\neg P, \mathbf{AXAFAG}\neg P\big\}\\
C_2 &= \big\{\mathbf{AFAG}\neg P \vee \mathbf{AGAF}\neg P, \mathbf{AGAF}\neg P, \mathbf{AF}\neg P,\\
&\qquad \mathbf{AXAGAF}\neg P, \neg P\big\}\\
C_3 &= \big\{\mathbf{AFAG}\neg P \vee \mathbf{AGAF}\neg P, \mathbf{AGAF}\neg P, \mathbf{AF}\neg P,\\
&\qquad \mathbf{AXAGAF}\neg P, \mathbf{AXAF}\neg P\big\}
\end{aligned}$$

C_0:n OR-seuraaja: $D_1 = \{\mathbf{AG}\neg P\}$
C_1:n OR-seuraaja: $D_2 = \{\mathbf{AFAG}\neg P\}$
C_2:n OR-seuraaja: $D_3 = \{\mathbf{AGAF}\neg P\}$
C_3:n OR-seuraaja: $D_4 = \{\mathbf{AGAF}\neg P, \mathbf{AF}\neg P\}$

D_1:n AND-seuraaja: $C_4 = \{\mathbf{AG}\neg P, \neg P, \mathbf{AXAG}\neg P\}$

D_2:n AND-seuraajat:

$$\begin{aligned}
C_5 &= \{\mathbf{AFAG}\neg P, \mathbf{AG}\neg P, \neg P, \mathbf{AXAG}\neg P\}\\
C_6 &= \{\mathbf{AFAG}\neg P, \mathbf{AXAFAG}\neg P\}
\end{aligned}$$

D_3:n AND-seuraajat:

$$\begin{aligned}
C_7 &= \{\mathbf{AGAF}\neg P, \mathbf{AF}\neg P, \mathbf{AXAGAF}\neg P, \neg P\}\\
C_8 &= \{\mathbf{AGAF}\neg P, \mathbf{AF}\neg P, \mathbf{AXAGAF}\neg P, \mathbf{AXAF}\neg P\}
\end{aligned}$$

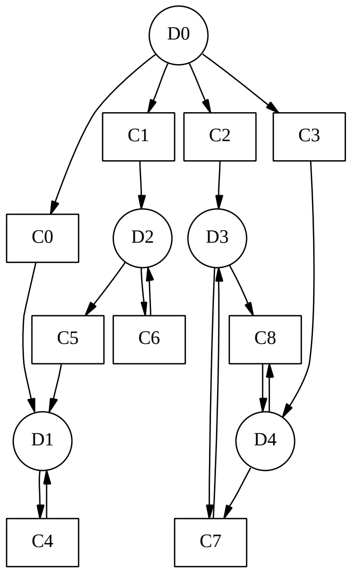
D_4:n AND-seuraajat:

$$\begin{aligned}
C_9 &= \{\mathbf{AGAF}\neg P, \mathbf{AF}\neg P, \mathbf{AXAGAF}\neg P, \neg P\} = C_7\\
C_{10} &= \{\mathbf{AGAF}\neg P, \mathbf{AF}\neg P, \mathbf{AXAGAF}\neg P, \mathbf{AXAF}\neg P\} = C_8
\end{aligned}$$

C_4:n OR-seuraaja: $D_5 = \{\mathbf{AG}\neg P\} = D_1$
C_5:n OR-seuraaja: $D_6 = \{\mathbf{AG}\neg P\} = D_1$
C_6:n OR-seuraaja: $D_7 = \{\mathbf{AFAG}\neg P\} = D_2$
C_7:n OR-seuraaja: $D_8 = \{\mathbf{AGAF}\neg P\} = D_3$
C_8:n OR-seuraaja: $D_9 = \{\mathbf{AGAF}\neg P, \mathbf{AF}\neg P\} = D_4$

Huomaa, että mikään yllä syntyvistä AND-solmuista ei ole ristiriitainen, joten solmujen karsinta ristiriitaisuuden perusteella ei tässä tehtävässä ole mahdollista.

Alustava taulu T_0:



Koska solmu C_4 ei sisällä keskenään ristiriitaisia lauseita eikä myöskään yhtään tulevaisuuslausetta, solmu C_4 jää myös lopulliseen tauluun. Tällöin OR-solmulle D_1 jää tauluun seuraaja, joten solmua D_1 ei myöskään karsita. Kaikki solmun C_0 seuraajat jäävät siis myös lopulliseen tauluun. Solmua C_0 ei karsita, koska se ei sisällä keskenään ristiriitaisia lauseita ja koska sen kaikki tulevaisuuslauseet (tässä tapauksessa vain yksi, $\mathbf{AFAG}\neg P$) toteutuvat alustavassa taulussa.

Seuraa, että T_0:sta saatava lopullinen taulu sisältää AND-solmun C_0, joka sisältää lauseen $\mathbf{AFAG}\neg P \vee \mathbf{AGAF}\neg P$. Todetaan, että tämä CTL-lause on toteutuva.

Solmujen C_0 ja C_4 avulla voidaan nyt muodostaa CTL-lauseelle malli

$$\begin{tikzcd} \underset{\neg P}{C_0} \arrow[r] & \underset{\neg P}{C_4} \arrow[loop above] \end{tikzcd}$$

Koska CTL-lause $\mathbf{AFAG}\neg P \vee \mathbf{AGAF}\neg P$ on toteutuva, seuraa, että myös LTL-lause $\mathbf{FG}\neg P \vee \mathbf{GF}\neg P \equiv \mathbf{GF}P \rightarrow \mathbf{GF}\neg P$ on toteutuva.