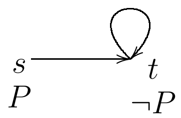
T-79.146 **Kevät 2005**
Logiikka tietotekniikassa: erityiskysymyksiä I
Laskuharjoitus 10
Ratkaisut

1. a) $P \land \mathbf{EF}Q$
   b) $\mathbf{EF}(P \land \mathbf{AXAG}\neg P)$
   c) $\mathbf{AG}\big(P \to \mathbf{AX}(P \to \mathbf{EF}Q)\big)$
   d) $\big(P \to \mathbf{A}(P\mathbf{U}Q)\big) \land \big(\neg P \to \mathbf{AX}(P \lor \mathbf{AX}P)\big)$
   e) $\mathbf{E}\big(P\mathbf{U}\mathbf{AG}((Q \to \mathbf{AX}\neg Q) \land (\neg Q \to \mathbf{AX}Q))\big)$
   f) $\mathbf{AG}\big(P \to \mathbf{AG}(\neg Q \land \neg R)\big) \land \mathbf{AG}\big((Q \lor R) \to \mathbf{AG}\neg P\big)$

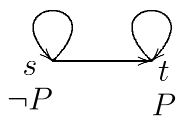
2. a) $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$, missä $S = \{s, t\}$, $R = \big\{\langle s, t\rangle, \langle t, t\rangle\big\}$, $v(s, P) =$ true ja $v(t, P) =$ false.



   $\mathcal{M}, s \models \mathbf{AF}P$ pätee, koska $(s, t, t, t, \ldots)$ on ainoa s:stä alkava täysi polku, ja tällä polulla on tila s, jolle pätee $\mathcal{M}, s \models P$. Siten $\mathbf{AF}P$ on toteutuva.

   Jotta $\mathbf{GF}P$ toteutuisi mallissa $\mathcal{M}$, tulisi mallissa silloin olla olemassa täysi polku x, jolle $\mathcal{M}, x \models \mathbf{GF}P$, jolloin $\mathcal{M}, x^i \models \mathbf{F}P$ pätisi kaikille $i \geq 0$, eli kaikille $i \geq 0$ olisi olemassa $j \geq i$ siten, että $\mathcal{M}, x^j \models P$. Toisin sanoen P:n pitäisi toteutua polun x *äärettömän monessa* (äärettömässä) loppuosassa. Tällaisia polkuja ei kuitenkaan ole, sillä $\mathcal{M}$:n ainoat täydet polut ovat $(s, t, t, t, \ldots)$ ja $(t, t, t, \ldots)$, ja P pätee ainoastaan äärellisen monessa näiden polkujen äärettömässä loppuosassa. Lause $\mathbf{GF}P$ ei siis ole toteutuva mallissa $\mathcal{M}$.

   b) $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$, missä $S = \{s, t\}$, $R = \big\{\langle s, s\rangle, \langle s, t\rangle, \langle t, t\rangle\big\}$, $v(s, P) =$ false ja $v(t, P) =$ true.

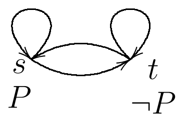


   $\mathcal{M}, s \models \mathbf{EFAG}P$ ja $\mathcal{M}, t \models \mathbf{EFAG}P$ pätevät, koska malli sisältää täydet polut $(s, t, t, t, \ldots)$ ja $(t, t, t, \ldots)$, joka kulkevat tilan t

kautta, jolle selvästi pätee $\mathcal{M}, t \models \mathbf{AG}P$. Lause $\mathbf{EFAG}P$ on siis pätevä mallissa.

Lause $\mathbf{FG}P$ ei kuitenkaan ole pätevä mallissa, sillä täydellä polulla $(s, s, s, \ldots)$ ei ole ääretöntä loppuosaa x siten, että $\mathcal{M}, x^i \models P$ pätisi kaikille i (koska $v(s, P) = \text{false}$), jolloin siis $\mathcal{M}, (s, s, s, \ldots) \not\models \mathbf{FG}P$.

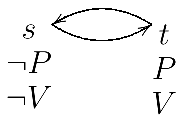
c) $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$, missä $S = \{s, t\}$, $R = \big\{\langle s, s\rangle, \langle s, t\rangle, \langle t, s\rangle, \langle t, t\rangle\big\}$, $v(s, P) = \text{true}$ ja $v(t, P) = \text{false}$.



Lause $\mathbf{FX}P$ on toteutuva, sillä mallissa on (esim.) täysi polku $x = (t, s, s, s, \ldots)$, jolle $\mathcal{M}, x \models \mathbf{X}P$ (koska $v(s, P) = \text{true}$), ja siten $\mathcal{M}, x \models \mathbf{FX}P$.

Lause $\mathbf{EFAX}P$ ei kuitenkaan ole toteutuva missään mallin tilassa: jos lause toteutuisi, olisi mallissa olemassa tilasta s tai t lähtevä tilojen s ja t kautta kulkeva täysi polku, joka kulkisi lauseen $\mathbf{AX}P$ toteuttavan tilan kautta. Tulisi siis olla joko $\mathcal{M}, s \models \mathbf{AX}P$ tai $\mathcal{M}, t \models \mathbf{AX}P$; kumpikaan näistä ei kuitenkaan toteudu, sillä sekä s:llä että t:llä on R-relaatiossa seuraaja t, jolle $\mathcal{M}, t \not\models P$.

3. a) $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$, missä $S = \{s, t\}$, $R = \big\{\langle s, t\rangle, \langle t, s\rangle\big\}$, $v(s, P) = v(s, V) = \text{false}$ ja $v(t, P) = v(t, V) = \text{true}$.



Tästä mallista voidaan erottaa täydet polut $x_1 = (s, t, s, t, \ldots)$ ja $x_2 = (t, s, t, s, \ldots)$.

- $\mathcal{M}, s \models \mathbf{E}(\neg V \mathbf{U} P)$ pätee, sillä $\mathcal{M}, x_1^1 \models P$ (koska $v(t, P) = \text{true}$), ja kaikille $i < 1$ pätee $\mathcal{M}, x_1^i \models \neg V$. Myös $\mathcal{M}, t \models \mathbf{E}(\neg V \mathbf{U} P)$ pätee, sillä x_2 on t:stä lähtevä täysi polku, ja $\mathcal{M}, x_2^0 \models P$.
- Koska $\mathcal{M}, x_1^0 \models \neg P$, niin $\mathcal{M}, s \models \mathbf{E}(V \mathbf{U} \neg P)$ pätee. Vastaavasti $\mathcal{M}, t \models \mathbf{E}(V \mathbf{U} \neg P)$ pätee, koska $\mathcal{M}, x_2^1 \models \neg P$, ja $\mathcal{M}, x_2^i \models V$ kaikille $i < 1$.
- $\mathcal{M}, s \models \mathbf{AF}(V \to \mathbf{AX}\neg V) \land \mathbf{EF}V$, sillä x_1 on ainoa s:stä alkava täysi polku, ja $\mathcal{M}, x_1 \models \mathbf{F}(V \to \mathbf{AX}\neg V)$ (koska selvästi esim. $\mathcal{M}, x_1^0 \models V \to \mathbf{AX}\neg V$, koska $v(s, V) = \text{false}$) ja

lisäksi $\mathcal{M}, x_1 \models \mathbf{F}V$, koska polku x_1 kulkee tilan t kautta, ja $v(t, V) = \text{true}$.
Samalla tavoin havaitaan, että $\mathcal{M}, t \models \mathbf{AF}(V \to \mathbf{AX}\neg V) \wedge \mathbf{EF}V$, sillä x_2 on ainoa t:stä alkava täysi polku, ja x_2:lle pätee $\mathcal{M}, x_2^0 \models \mathbf{AX}\neg V$, koska $\mathcal{M}, t \models \mathbf{AX}\neg V$ (ainoa t:n seuraaja on s, ja $v(s, V) = \text{false}$). Myös $\mathcal{M}, t \models \mathbf{EF}V$ pätee, koska t:stä lähtevälle täydelle polulle x_2 pätee $\mathcal{M}, x_2^0 \models V$ (koska $v(t, V) = \text{true}$).

b) $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$, missä $S = \{s, t\}$, $R = \big\{\langle s, t\rangle, \langle t, s\rangle\big\}$, $v(t, P) = v(s, V) = \text{false}$ ja $v(s, P) = v(t, V) = \text{true}$.

$$\begin{tikzcd} s \arrow[r, bend left] & t \arrow[l, bend left] \\ P & \neg P \\ \neg V & V \end{tikzcd}$$

Mallista $\mathcal{M}$ voidaan jälleen erottaa kaksi täyttä polkua $x_1 = (s, t, s, t, \ldots)$ ja $x_2 = (t, s, t, s, \ldots)$.

- $\mathcal{M}, s \models \mathbf{AG}(P \to \mathbf{F}V)$, sillä x_1 on ainoa s:stä alkava täysi polku, ja $\mathcal{M}, x_1 \models \mathbf{G}(P \to \mathbf{F}V)$. Tämä puolestaan seuraa siitä, että $\mathcal{M}, x_1^{2k} \models \mathbf{F}V$ (koska $\mathcal{M}, x_1^{2k+1} \models V$) kaikilla $k \geq 0$ sekä siitä, että $\mathcal{M}, x_1^{2k+1} \not\models P$ kaikilla $k \geq 0$.
  Vastaavasti myös $\mathcal{M}, t \models \mathbf{AG}(P \to \mathbf{F}V)$ pätee, sillä x_2 on ainoa t:stä alkava täysi polku, ja $\mathcal{M}, x_2 \models \mathbf{G}(P \to \mathbf{F}V)$, koska $\mathcal{M}, x_2^{2k} \not\models P$ ja $\mathcal{M}, x_2^{2k+1} \models \mathbf{F}V$ kaikilla $k \geq 0$.
- $\mathcal{M}, s \models \mathbf{AF}\big(P \wedge \mathbf{F}(\neg P \wedge \mathbf{X}P)\big)$, sillä x_1 on ainoa s:stä alkava täysi polku, ja $\mathcal{M}, x_1^0 \models P \wedge \mathbf{F}(\neg P \wedge \mathbf{X}P)$, koska $\mathcal{M}, x_1^0 \models P$ ($v(s, P) = \text{true}$) ja $\mathcal{M}, x_1^0 \models \mathbf{F}(\neg P \wedge \mathbf{X}P)$, sillä $\mathcal{M}, x_1^1 \models \neg P \wedge \mathbf{X}P$ (koska $v(t, P) = \text{false}$ ja $\mathcal{M}, (x_1^1)^1 \models P$).
  Myös $\mathcal{M}, t \models \mathbf{AF}\big(P \wedge \mathbf{F}(\neg P \wedge \mathbf{X}P)\big)$ on voimassa, sillä x_2 on ainoa t:stä lähtevä täysi polku, ja koska $x_2^1 = x_1 = x_1^0$ ja $\mathcal{M}, x_1^0 \models P \wedge \mathbf{F}(\neg P \wedge \mathbf{X}P)$ (ks. yllä), $\mathcal{M}, x_2 \models \mathbf{F}\big(P \wedge \mathbf{F}(\neg P \wedge \mathbf{X}P)\big)$.
- $\mathcal{M}, s \models \mathbf{A}(\neg V \mathbf{U} V)$, sillä x_1 on ainoa s:stä alkava täysi polku, ja $\mathcal{M}, x_1 \models \neg V \mathbf{U} V$, koska $\mathcal{M}, x_1^1 \models V$ ($v(t, V) = \text{true}$) ja $\mathcal{M}, x_1^i \models \neg V$ kaikille $i < 1$ ($v(s, V) = \text{false}$).
  Koska $v(t, V) = \text{true}$, $\mathcal{M}, x \models \neg V \mathbf{U} V$ pätee kaikille t:stä alkaville täysille poluille x. Tästä seuraa, että $\mathcal{M}, t \models \mathbf{A}(\neg V \mathbf{U} V)$ pätee.