# TEMPORAALILOGIIKKA

- Sovelletuimpia modaalilogiikkoja
- Aikatulkinta: mahdolliset maailmat mahdollisia ajanhetkiä
- Laskennallinen tulkinta: mahdolliset maailmat mahdollisia laskennan tiloja
- Formaali malli $\langle S, R, v\rangle$:
  $sRt$: $t$ on (eräs) $s$:n mahdollinen tulevaisuus ja $s$ on (eräs) $t$:n mahdollinen menneisyys.
  $\mathcal{M}, s \Vdash \mathbf{F}Q$ joss $\mathcal{M}, t \Vdash Q$ jollekin $t \in S$ jolle $sRt$.
  $\mathcal{M}, s \Vdash \mathbf{P}Q$ joss $\mathcal{M}, t \Vdash Q$ jollekin $t \in S$ jolle $tRs$.
  $R$ usein transitiivinen.
  (lineaarinen/diskreetti/jatkuva/haarautuva...)





**Muita operaattoreita:**

- $\mathbf{G}Q = \neg\mathbf{F}\neg Q$; $\mathbf{H}Q = \neg\mathbf{P}\neg Q$
- $\mathbf{Always}\ Q = \mathbf{G}Q \wedge Q \wedge \mathbf{H}Q$ (aina)
- $\mathcal{U}$ (kunnes):
  $\mathcal{M}, s \Vdash A\mathcal{U}B$ joss jollekin $t, sRt$, $\mathcal{M}, t \Vdash B$ ja kaikilla $u \in S$, jos $sRu$ ja $uRt$, niin $\mathcal{M}, u \Vdash A$.
  $\boxed{\Rightarrow}\ \top\mathcal{U}B \leftrightarrow FB$
- $\mathcal{S}$ (siitä asti kun):
  $\mathcal{M}, s \Vdash A\mathcal{S}B$ joss jollekin $t, tRs$, $\mathcal{M}, t \Vdash B$ ja kaikilla $u \in S$, jos $uRs$ ja $tRu$, niin $\mathcal{M}, u \Vdash A$.
  $\boxed{\Rightarrow}\ \top\mathcal{S}B \leftrightarrow PB$
- $\mathbf{X}$ (seuraavassa tilassa): kaikissa/jossakin?
  Saavutettavuusrelaatioiden suhde ($R_{\mathbf{X}}$ vs. $R_{\mathbf{F}}$)?





## Dynaaminen logiikka

- Modaalioperaattorit tapahtumille:
  $[a]P$ ($P$ tosi aina tapahtuman $a$ jälkeen)
- Tapahtumilla voi olla rakennetta:
  $a; b$ (sarjallistaminen)
  $a \cup b$ (epädeterministinen valinta)
  $a^*$ (toisto)
  $P?$ (Testi: jos $P$ tosi jatketaan muuten ei).

Esimerkki.

$[(P?; a) \cup (\neg P?; b)]Q$ ([if P then a else b] Q)

$[(P?; a)^*; \neg P?]Q$ ([while P do a] Q)





## Temporaalilogiikka rinnakkaisessa ja hajautetussa laskennassa

- Useita rinnakkaisia ja hajautettuja prosesseja
- Jaetut resurssit, koordinointi, kommunikointi
- Keskeytyksetön toiminta
- Reaktiivisuus, epädeterministisyys
- Esimerkkejä: käyttöjärjestelmät, tietoliikenneprotokollat, laitteistokomponentit, ohjausjärjestelmät, ...

## Reaktiivisten järjestelmien suunnittelu

- Ko. järjestelmien suunnittelu haastavaa:
  - Virhetilanteet usein vaikeasti toistettavissa
  - Käyttäytyminen "ääretön"
- Tarvitaan uusia menetelmiä:

  (i) Virheet paikallistettava mahdollisimman aikaisessa vaiheessa suunnittelua/toteutusta.
  (ii) On pystyttävä käsittelemään päättymättömiä ajoja.





## Temporaalilogiikka

- Formaali malli järjestelmän käyttäytymiselle.
- Kieli, jolla voidaan määritellä järjestelmän ominaisuuksia.

  **Esimerkki.**
  - Keskinäinen poissulkeminen: $\mathbf{G}\neg(at_i(m) \wedge at_j(m'))$
  - Oikeellisuus:
    (Osittainen: jos ehto $P$ pätee ohjelman alkutilanteessa $m_0$, ehto $Q$ pätee lopputilanteessa $m_e$.)
    $at(m_0) \wedge P \rightarrow \mathbf{G}(at(m_e) \rightarrow Q)$
    (Kokonaisoikeellisuus: lisäksi ehto, että ohjelma pysähtyy.)
    $at(m_0) \wedge P \rightarrow \mathbf{F}(at(m_e) \wedge Q)$
  - Ei turhia toimintoja: (vastaus $v_i$ vain saatuun pyyntöön $p_i$):
    $\mathbf{F}v_i \rightarrow (\neg v_i)\mathcal{U}p_i$





## Temporaalilogiikan soveltaminen

- Oikeellisuuden todistaminen
  - Järjestelmän toiminta ja oikeellisuusehdot mallitetaan temporaalilogiikan lauseina
  - Todistus (että oikeellisuusehdot seuraavat järjestelmän ominaisuuksista) temporaalilogiikan avulla (yleensä kompositionaalisesti)
  - Virhealtista ja vaikeasti automatisoitavissa
- Ohjelmasynteesi
  - Ohjelman määrittely temporaalilogiikalla
  - Määrittelyn malli antaa ohjelman
  - Helpommin automatisoitavissa (jopa ajettavat temporaalispesifikaatiot mahdollisia)





## Temporaalilogiikan soveltaminen (II)

- Mallintarkastus
  - Tarkastetaan, onko järjestelmän mallilla halutut ominaisuudet
  - Tutkittavat ominaisuudet temporaalilogiikalla
  - Tehokkaita mallintarkastimia kehitetty
- Sovelletuimmat temporaalilogiikat: CTL ja LTL

# CTL (Computation Tree Logic)

- Temporaalioperaattorit pareja:
  (i) Polkukvanttori ($\mathbf{A}/\mathbf{E}$)
  (ii) temporaalioperaattori ($\mathbf{X}/\mathbf{U}/\mathbf{G}/\mathbf{F}$)
- Syntaksi
  - Jokainen atomilause on CTL-lause.
  - Jos $P, Q$ ovat CTL-lauseita, niin $P \wedge Q$, $\neg P$, $\mathbf{AX}P$, $\mathbf{A}(P\mathbf{U}Q)$, $\mathbf{E}(P\mathbf{U}Q)$ ovat myös.
- Esimerkkejä: $(P \wedge Q) \wedge \neg Q$
  $\mathbf{AX}(P \wedge \neg Q)$
  $\mathbf{E}((\mathbf{AX}P)\mathbf{U}Q)$





# CTL

- Huom. $\mathbf{X}/\mathbf{U}$-operaattorien sisäkkäisyys ja Boolen yhdistelmät rajoitettuja:
  $\mathbf{AXAX}P$ CTL-lause
  mutteivat $\mathbf{AXX}P$ ja $\mathbf{A}\neg\mathbf{X}P$
- Muut operaattorit ($\mathbf{EX}, \mathbf{AG}, \mathbf{EG}, \mathbf{AF}, \mathbf{EF}$) määritellään lyhennysmerkintöinä annettujen operaattoreiden ($\mathbf{AX}$, $\mathbf{A}(.\mathbf{U}.)$, $\mathbf{E}(.\mathbf{U}.)$) avulla.
- CTL kuvaa laskentapuun ominaisuuksia ja kvanttoreilla voidaan kertoa, päteekö tietty ominaisuus jollekin vai kaikille tilasta lähteville haaroille.
  Esim. $\mathbf{AX}P$ (kaikilla laskentapoluilla seuraavassa tilassa $P$)
  $\mathbf{E}(P\mathbf{U}Q)$ (on olemassa polku, jossa $P$ kunnes $Q$)

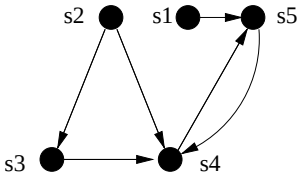




# CTL semantiikka

- CTL:n mallit ovat mahdollisten maailmojen malleja $\langle S, R, v\rangle$, joissa saavutettavuusrelaatio $R$ on sarjallinen.
- Huom. $R$ on operaattoriin $\mathbf{X}$ liittyvä relaatio.
- Täysi polku on ääretön sarja $s_0, s_1, \ldots$ tiloja siten, että kaikilla $i$: $s_i R s_{i+1}$. (Yksi tilasta $s_0$ lähtevän laskentapuun haara).

**Esimerkki.** Mallissa $M$:




Täysiä polkuja esim.
$s1, s5, s4, s5, s4, \ldots$
$s2, s4, s5, s4, \ldots$
$s2, s3, s4, s5, s4, \ldots$





# CTL Semantiikka (II)

Määritellään milloin CTL-lause on tosi tilassa $s$ ($\mathcal{M}, s \models P$):

- $\mathcal{M}, s \models P$ joss $v(s, P) = \text{true}$, kun $P$ on atomilause
- $\mathcal{M}, s \models \neg P$ joss $\mathcal{M}, s \not\models P$ .
- $\mathcal{M}, s \models P \wedge Q$ joss $\mathcal{M}, s \models P$ ja $\mathcal{M}, s \models Q$.
- $\mathcal{M}, s \models \mathbf{AX}P$ joss $\mathcal{M}, t \models P$ kaikille $t$, joille $sRt$.
- $\mathcal{M}, s \models \mathbf{A}(P\mathbf{U}Q)$ joss mallissa $\mathcal{M}$ kaikille täysille poluille $(s_0, s_1, \ldots)$ missä $s = s_0$, on olemassa $i$, jolle $\mathcal{M}, s_i \models Q$ ja kaikille $j < i$, $\mathcal{M}, s_j \models P$.
- $\mathcal{M}, s \models \mathbf{E}(P\mathbf{U}Q)$ joss mallissa $\mathcal{M}$ on olemassa täysi polku $(s_0, s_1, \ldots)$ siten, että $s = s_0$ ja on olemassa $i$, jolle $\mathcal{M}, s_i \models Q$ ja kaikille $j < i$, $\mathcal{M}, s_j \models P$.

## CTL Semantiikka (III)

**Esimerkki.** Olkoon edellisessä mallissa $M$:
$v(P, s4) = \text{true}$ ja muutoin $v(P, s) = \text{false}$ sekä
$v(Q, s2) = \text{true}$ ja muutoin $v(Q, s) = \text{false}$.

Nyt $\mathcal{M}, s2 \not\models \mathbf{AX}P$ mutta $\mathcal{M}, s3 \models \mathbf{AX}P$
$\mathcal{M}, s2 \not\models \mathbf{A}(Q\mathbf{U}P)$ mutta $\mathcal{M}, s2 \models \mathbf{E}(Q\mathbf{U}P)$
$\mathcal{M}, s3 \not\models \mathbf{E}(Q\mathbf{U}P)$ mutta $\mathcal{M}, s4 \models \mathbf{A}(Q\mathbf{U}P)$





## CTL

- Lyhennysmerkintöjä:

  $\mathbf{EX}P$: $\neg\mathbf{AX}\neg P$ $\quad$ $\mathbf{AG}P$: $\neg\mathbf{EF}\neg P$

  $\mathbf{AF}P$: $\mathbf{A}(\top\mathbf{U}P)$ $\quad$ $\mathbf{EG}P$: $\neg\mathbf{AF}\neg P$

  $\mathbf{EF}P$: $\mathbf{E}(\top\mathbf{U}P)$

- Huomaa refleksiivisyys ja transitiivisuus operaattorissa $\mathbf{U}$:

  Esimerkki. Jos $\mathcal{M}, s_0 \models P$, niin $\mathcal{M}, s_0 \models \mathbf{A}(Q\mathbf{U}P)$ ja $\mathcal{M}, s_0 \models \mathbf{E}(Q\mathbf{U}P)$
  (ja siis esim. $\mathcal{M}, s_0 \models \mathbf{AF}P$).

  Jos $s_0 R s_1$, $s_1 R s_2$ ja $\mathcal{M}, s_2 \models P$, niin
  $\mathcal{M}, s_0 \models \mathbf{E}(\top\mathbf{U}P)$ $(= \mathbf{EF}P)$.





## LTL (Linear Temporal Logic)

- Lineaarisen ajan temporaalilogiikka, jossa operaattorit $\mathbf{X}, \mathbf{U}, \mathbf{G}, \mathbf{F}$
- Syntaksi:
  - Jokainen atomilause on LTL-lause.
  - Jos $P, Q$ ovat LTL-lauseita, niin $P \wedge Q$, $\neg P$, $\mathbf{X}P$, $P\mathbf{U}Q$ ovat myös.
- Esimerkkejä:
  $\neg\mathbf{X}(P \wedge \neg Q)$
  $\mathbf{X}(\mathbf{X}(\mathbf{X}P\mathbf{U}(Q \wedge P)) \wedge P)$
- Operaattorit $(\mathbf{G}, \mathbf{F})$ näiden avulla lyhennysmerkintöinä.
- Huom. $\mathbf{X}/\mathbf{U}$-operaattorien sisäkkäisyys ja Boolen yhdistelmät mahdollisia: $((\mathbf{X}(\neg\mathbf{X}P))\mathbf{U}(\mathbf{X}(\mathbf{X}P)))$





## LTL semantiikka

LTL-malli on kuten CTL-malli mutta lauseet tulkitaan täysillä poluilla (eikä tiloissa kuten CTL:ssä).
Jos $x = (s_0, s_1, \ldots)$ täysi polku, $x^i = (s_i, s_{i+1}, \ldots)$
Määritellään milloin mallissa $\mathcal{M}$ lause $P$ on tosi täydellä polulla $x$ $(\mathcal{M}, x \models P)$

- $\mathcal{M}, x \models P$ joss $v(s_0, P) = \text{true}$, missä $x = (s_0, s_1, \ldots)$ ja $P$ atomilause.
- $\mathcal{M}, x \models \neg P$ joss $\mathcal{M}, x \not\models P$ .
- $\mathcal{M}, x \models P \wedge Q$ joss $\mathcal{M}, x \models P$ ja $\mathcal{M}, x \models Q$.
- $\mathcal{M}, x \models \mathbf{X}P$ joss $\mathcal{M}, x^1 \models P$
- $\mathcal{M}, x \models P\mathbf{U}Q$ joss on olemassa $i$, jolle $\mathcal{M}, x^i \models Q$ ja kaikille $j < i$ $\mathcal{M}, x^j \models P$.

## LTL semantiikka (II)

**Esimerkki.** Edellisessä mallissa $M$ täydet polut
$x_1 = (s2, s3, s4, s5, s4, \ldots)$ ja
$x_2 = (s2, s4, s5, s4, \ldots)$
Nyt $M, x_1 \not\models \mathbf{X}P$ mutta $M, x_2 \models \mathbf{X}P$
$M, x_1 \not\models Q\mathbf{U}P$ mutta $M, x_2 \models Q\mathbf{U}P$





## LTL

- Lyhennysmerkintöjä:
  $\mathbf{F}P$: $\top\mathbf{U}P$
  $\mathbf{G}P$: $\neg\mathbf{F}\neg P$
  $\overset{\infty}{\mathbf{F}}P$: $\mathbf{GF}P$
  $\overset{\infty}{\mathbf{G}}P$: $\mathbf{FG}P$
  $P\mathbf{B}Q$: $\neg((\neg P)\mathbf{U}Q)$
- Huomaa refleksiivisyys ja transitiivisuus operaattorissa $\mathbf{U}$:
  Esimerkki. Jos $\mathcal{M}, x \models P$, niin $\mathcal{M}, x \models (Q\mathbf{U}P)$.
  Jos $\mathcal{M}, x \models \mathbf{X}^i P$ jollekin $i \geq 0$, niin $\mathcal{M}, x \models (\top\mathbf{U}P)$.
  Itse asiassa kaikilla $\mathcal{M}, x$ pätee esimerkiksi:
  $\mathcal{M}, x \models \mathbf{G}P \rightarrow P$ ja $\mathcal{M}, x \models \mathbf{G}P \rightarrow \mathbf{GG}P$





## CTL*

CTL$^*$ = CTL + LTL
(CTL: tilalauseet/LTL: polkulauseet)

CTL$^*$-lauseita ovat seuraavilla säännöillä saatavat **tilalauseet**.

- Jokainen atomilause on tilalause.
- Jos $P, Q$ ovat tilalauseita, niin $P \wedge Q$ ja $\neg P$ ovat myös.
- Jos $P$ on polkulause, niin $\mathbf{E}P$ ja $\mathbf{A}P$ ovat tilalauseita.
- Jokainen tilalause on polkulause.
- Jos $P, Q$ ovat polkulauseita, niin $P \wedge Q$ ja $\neg P$ ovat myös.
- Jos $P, Q$ ovat polkulauseita, niin $\mathbf{X}P$ ja $P\mathbf{U}Q$ ovat polkulauseita.

Esim. $\mathbf{E}\neg(P\mathbf{U}Q)$ on CTL$^*$-lause mutta $\neg(P\mathbf{U}Q)$ ei.





**Semantiikka**:

- $\mathcal{M}, s_0 \models P$ joss $v(s_0, P) = \text{true}$, kun $P$ on atomilause.
- $\mathcal{M}, s_0 \models \neg P$ joss $\mathcal{M}, s_0 \not\models P$ .
- $\mathcal{M}, s_0 \models P \wedge Q$ joss $\mathcal{M}, s_0 \models P$ ja $\mathcal{M}, s_0 \models Q$.
- $\mathcal{M}, s_0 \models \mathbf{E}P$ joss mallissa $\mathcal{M}$ on olemassa täysi polku $x = (s_0, s_1, \ldots)$, jolle $\mathcal{M}, x \models P$
- $\mathcal{M}, s_0 \models \mathbf{A}P$ joss mallissa $\mathcal{M}$ kaikille täysille poluille $x = (s_0, s_1, \ldots)$, $\mathcal{M}, x \models P$
- $\mathcal{M}, x \models P$ joss $\mathcal{M}, s_0 \models P$, missä $x = (s_0, s_1, \ldots)$ ja $P$ tilalause.
- $\mathcal{M}, x \models \neg P$ joss $\mathcal{M}, x \not\models P$
- $\mathcal{M}, x \models P \wedge Q$ joss $\mathcal{M}, x \models P$ ja $\mathcal{M}, x \models Q$.
- $\mathcal{M}, x \models \mathbf{X}P$ joss $\mathcal{M}, x^1 \models P$
- $\mathcal{M}, x \models P\mathbf{U}Q$ joss on olemassa $i$, jolle $\mathcal{M}, x^i \models Q$ ja kaikille $j < i$ $\mathcal{M}, x^j \models P$.