

Ratkeavuus

- Logiikka on **ratkeava**, jos on olemassa algoritmi (Turingin kone), joka ratkaisee, onko annettu lause ko. logiikan pätevä lause vai ei.
- Jos logiikalla on todistusteoria (esim. Hilbert-tyylinen), logiikka on **puoli-ratkeava**: on olemassa algoritmi, joka pysähtyy ja vastaa kyllä, kun sille annetaan syötteenä pätevä lause.
(Muodostetaan kaikki todistukset jollain systemaattisella tavalla.)
⇒ Pätevien lauseiden joukko on rekursiivisesti numeroituva.

Esimerkki. Osoitetaan, että logiikalla **K** on äärellisen mallin ominaisuus **filtraatiolla**.

Oletetaan, ettei lause Q ole **K**-pätevä. Tällöin on olemassa malli $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$ ja maailma $s_0 \in S$ siten, että $\mathcal{M}, s_0 \not\models Q$.

Äärellinen malli $|\mathcal{M}|$ filtraatiolla mallista \mathcal{M} :

- Olkoon $\text{Sub}(Q)$ Q :n kaikkien alilauseiden joukko.
- Määritellään ekvivalenssirelaatio \sim joukolle S : $s \sim t$ jos kaikille $P \in \text{Sub}(Q)$, $\mathcal{M}, s \models P$ joss $\mathcal{M}, t \models P$.
- Olkoon $|s| = \{t \in S : t \sim s\}$ ja $|S| = \{|s| : s \in S\}$. $|S|$ on äärellinen: korkeintaan 2^n jäsentä, missä n on lauseen Q alilauseiden määrä.
- Olkoon malli $|\mathcal{M}| = \langle |S|, |R|, |v| \rangle$, missä
relaatio $|R|: |s||R||t|$ joss on olemassa $s' \in |s|$ ja $t' \in |t|$, joille $s'Rt'$
ja valuaatio $|v|: |v|(|s|, P) = v(s, P)$

Äärellisen mallin ominaisuus

Määritelmä. Modaalilogiikalla **L** on **äärellisen mallin ominaisuus**, jos jokaisella lauseella P , joka ei ole **L**-pätevä, on olemassa äärellinen **L**-malli, jossa P on epätosi (jossain tilassa).

Jos logiikalla on äärellisen mallin ominaisuus, sen ei-pätevien lauseiden joukko on puoli-ratkeava.

(Muodostetaan kaikki äärelliset mallit jossain systemaattisessa järjestyksessä ja tarkistetaan kullekin, onko lause epätosi ko. mallissa.)

Propositio. Jos modaalilogiikalla **L** on todistusteoria ja äärellisen mallin ominaisuus, **L** on ratkeava.

Miten osoitetaan, että modaalilogiikalla on äärellisen mallin ominaisuus?

⇒ **Filtraatio**.

(Esimerkki jatkuu)

Osoitetaan rakenteisella induktiolla, että kaikille $P \in \text{Sub}(Q)$,

$$\mathcal{M}, s \models P \text{ joss } |\mathcal{M}|, |s| \models P.$$

- P on atomilause: $|v|(|s|, P) = v(s, P)$
- $\mathcal{M}, s \models \neg P$ joss $\mathcal{M}, s \not\models P$ joss (IH) $|\mathcal{M}|, |s| \not\models P$ joss $|\mathcal{M}|, |s| \models \neg P$.
- \dots
- $\Box P$: (\Leftarrow) Olkoon $\mathcal{M}, s \not\models \Box P$. Siis löytyy t , jolle sRt ja $\mathcal{M}, t \not\models P$. Tällöin $|s||R||t|$ ja $|\mathcal{M}|, |t| \not\models P$ (IH). Siis $|\mathcal{M}|, |s| \not\models \Box P$.
(\Rightarrow) Olkoon $|\mathcal{M}|, |s| \not\models \Box P$. Täten on olemassa $|t|$, jolle $|s||R||t|$ ja $|\mathcal{M}|, |t| \not\models P$. Siis $\mathcal{M}, t \not\models P$ (IH). Täten löytyy $s' \in |s|$ ja $t' \in |t|$, joille $s'Rt'$ ja $\mathcal{M}, t' \not\models P$. Siis $\mathcal{M}, s' \not\models \Box P$, jolloin $\mathcal{M}, s \not\models \Box P$.

(Esimerkki jatkuu)

- Näin ollen kaikille $P \in \text{Sub}(Q)$, $\mathcal{M}, s \Vdash P$ joss $|\mathcal{M}|, |s| \Vdash P$.
- Koska $\mathcal{M}, s_0 \not\Vdash Q$ ja $Q \in \text{Sub}(Q)$, $|\mathcal{M}|, |s_0| \not\Vdash Q$.
- Täten olemme osoittaneet, että logiikalla \mathbf{K} on äärellisen mallin ominaisuus.

Useilla muillakin normaaleilla modaalilogiikoilla on äärellisen mallin ominaisuus (esim. **T, K4, S4, KB, B, S5, D, D4, DB, KD45**).

Ratkaisuproseduuri (lauseen P \mathbf{K} -pätevyydelle):

1. Taulun juureksi $\langle 1 \rangle \neg P$.
 2. WHILE taulu ei suljettu eikä kaikkia lauseita merkitty käytetyiksi DO BEGIN
 - 2.1 Valitaan taulusta ylin käyttämätön solmu σQ .
 - 2.2 Jos Q ei ole literaali, jokaiselle haaralle θ , joka kulkee σQ kautta:
 - Jos σQ on muotoa $\sigma\alpha$, lisätään haaran θ loppuun ensin $\sigma\alpha_1$ ja sitten $\sigma\alpha_2$.
 - Jos σQ on muotoa $\sigma\beta$, lisätään θ :n loppuun kaksi lapsisolmua $\sigma\beta_1$ ja $\sigma\beta_2$.
 - Jos σQ on muotoa $\sigma\neg P$ lisätään haaran θ loppuun solmu $\sigma n\neg P$ jollekin tässä haarassa rajoittamattomalle σn sekä tämän jälkeen σnX kullekin haarassa esiintyvälle σX .
 - Jos σQ on muotoa $\sigma\Box P$, kaikille tässä haarassa tarjolla oleville σn lisätään haaran θ loppuun solmu σnP .
 - 2.3 Merkitään σQ käytetyiksi.
- /* Lisätään lause vain jos ko. lause ei jo esiinny haarassa.*/
END.

Ratkeavuus

- Jos vastamallien koolle voidaan antaa yläraja, logiikka on ratkeava.
- Näin ei saada kovin tehokkaita ratkaisumenetelmiä.
- Taulumenetelmä tehokkaampi lähestymistapa.

Esimerkki. Logiikan \mathbf{K} ratkeavuus

Osoitetaan, että annettu logiikan \mathbf{K} ratkaisuproseduuri pysähtyy väistämättä. Todistukseen tarvitaan **Königin lemmaa**:

Jos puussa on ääretön määrä solmuja mutta jokaisella solmulla on äärellinen määrä lapsisolmuja, puussa on ääretön haara.

Propositio. Ratkaisuproseduuri pysähtyy jokaiselle lauseelle äärellisen askelmäärän jälkeen.

Todistus. Oletetaan, että logiikan \mathbf{K} ratkaisuproseduuri ei pysähdy lauseelle P , jolloin tuloksena on ääretön puu, jonka jokaisella solmulla on äärellinen määrä lapsia.

Königin lemmän perusteella puussa on ääretön haara θ .

Tässä haarassa on ääretön määrä prefiksoituja lauseita, jotka ovat kaikki erilaisia (oletetaan, että proseduuri lisää prefiksoidun lauseen haaraan vain, jos se ei vielä esiinny siinä).

Jokaiselle prefiksille σ : jos σQ esiintyy haarassa θ , Q on lauseen P alilause tai sen negaatio. Koska alilauseita on vain äärellinen määrä, jokainen prefiksi voi esiintyä vain äärellisen monta kertaa.

Täten äärettömän monta erilaista prefiksiä täytyy esiintyä haarassa θ .

On kaksi mahdollisuutta:



(i) Haarassa θ on äärettömän monta samanmittaista prefiksiä.

Olkoon n pienin luonnollinen luku siten, että haarassa on äärettömän monta n mittaista prefiksiä.

$n \neq 1$, koska ainoa yhdenmittainen prefiksi on $\langle 1 \rangle$ ja se esiintyy äärellisen monta kertaa.

$n > 1$: Ainoa tapa saada n -mittainen prefiksi haaraan on käyttää $\neg\square$ - tai \square -sääntöä lauseelle σQ , jossa prefiksin σ mitta on $n - 1$.

Siis jos haarassa on äärettömän monta n -mittaista prefiksiä, siinä on oltava äärettömän monta $(n - 1)$ -mittaista prefiksiä. Tämä on ristiidassa luvun n valinnan kanssa.

Siis vaihtoehto (i) ei voi toteutua.



Jos lause on saatu \square - tai $\neg\square$ -säännöllä, se on muotoa σkQ ja se on saatu muotoa $\sigma Q'$ olevasta lauseesta. Oletetaan, että (L) pätee lauseelle $\sigma Q'$. Nyt prefiksin σk mitta on $1 +$ prefiksin σ mitta mutta lauseessa Q on vastaavasti yksi modaaliooperaattori vähemmän kuin lauseessa Q' . Siis (L) pätee myös lauseelle σkQ .

Koska (L) pätee kaikille haaran prefiksoiduille lauseille, haarassa voi esiintyä vain prefiksejä, joiden mitta on korkeintaan $m + 1$.

Siis vaihtoehto (ii) on myös mahdoton.

Täten taulu on aina äärellinen ja logiikan \mathbf{K} ratkaisumenetelmä pysähtyy mille tahansa lauseelle P . ■

- Vastaava ratkaisumenetelmä toimii käsitellyille modaalilogiikoille, joiden kehykset eivät ole transitiivisia.
- Transitiivisuutta varten tarvitaan vahvempi lopetusehto (ts. ehto sille milloin haaran laajentaminen voidaan lopettaa).



(ii) Jokaisella luvulla n haarassa θ on äärellisen monta n -mittaista prefiksiä.

Koska prefiksejä on haarassa äärettömästi, on oltava äärettömän monen mittaisia prefiksejä.

Näytetään, että tämä on mahdotonta osoittamalla, että jokaiselle haaran lauseelle σQ pätee:

L: Prefiksin σ pituuden summa Q :n modaaliooperaattoreiden määrän kanssa on aina pienempi tai yhtä suuri kuin $1 + m$

missä m P :n modaaliooperaattoreiden määrä.

Selvästi (L) pätee taulun juurelle $\langle 1 \rangle \neg P$.

Jos lause on saatu α - tai β -säännöllä lauseesta, jolle (L) pätee, pätee se myös uudelle prefiksoidulle lauseelle.



Käännös predikaattilogiikkaan

Modaalilogiikka voidaan kääntää rajoitettuun osajoukkoon predikaattilogiikkaa:

- Jokaiselle modaalilogiikan atomilauseelle P on yksipaikkainen predikaattisymboli P .
- Kaksi muuttujaa.
- Kaksipaikkainen predikaattisymboli R .

Olkoon x_1 ja x_2 kaksi eri muuttujaa ja jos x on toinen näistä, x' on toinen.

Määritelmä. Olkoon τ seuraava kuvaus modaalilauseilta ja muuttujilta predikaattilogiikan lauseille:

1. $\tau(\top, x) = \top$; $\tau(\perp, x) = \perp$;
2. $\tau(P, x) = P(x)$ atomilauseelle P ;
3. $\tau(\neg P, x) = \neg\tau(P, x)$;
4. $\tau(P \rightarrow Q, x) = \tau(P, x) \rightarrow \tau(Q, x)$;
5. $\tau(\Box P, x) = \forall x'(R(x, x') \rightarrow \tau(P, x'))$;

Esimerkki. $\tau(\neg\Box P \rightarrow \Box\neg\Box P, x_1) = \tau(\neg\Box P, x_1) \rightarrow \tau(\Box\neg\Box P, x_1)$
 $= \neg\tau(\Box P, x_1) \rightarrow \forall x_2(R(x_1, x_2) \rightarrow \tau(\neg\Box P, x_2))$
 $= \neg(\forall x_2(R(x_1, x_2) \rightarrow \tau(P, x_2))) \rightarrow \forall x_2(R(x_1, x_2) \rightarrow \neg\tau(\Box P, x_2))$
 $= \neg(\forall x_2(R(x_1, x_2) \rightarrow P(x_2))) \rightarrow$
 $\forall x_2(R(x_1, x_2) \rightarrow \neg(\forall x_1(R(x_2, x_1) \rightarrow \tau(P, x_1))))$
 $= \neg(\forall x_2(R(x_1, x_2) \rightarrow P(x_2))) \rightarrow$
 $\forall x_2(R(x_1, x_2) \rightarrow \neg(\forall x_1(R(x_2, x_1) \rightarrow P(x_1))))$

Multimodaalilogiikat

Monen agentin tietämyslogiikka $S5_n$

- n agenttia: $K_i, i = 1, \dots, n$
Esim. $K_1K_2\neg K_1P$
- Malli $\langle S, R_1, \dots, R_n, v \rangle$
- $\mathcal{M}, s \Vdash K_i P$ joss $\mathcal{M}, t \Vdash P$ kaikille $t \in S$, joille sR_it .
- (Hilbert) todistusteoria:
kaikille K_i **S5**-aksioomat.
- Kaikki tietävät: EP
 - $\mathcal{M}, s \Vdash EP$ joss $\mathcal{M}, s \Vdash K_i P$ kaikille $i = 1, \dots, n$
 - **Aksiooma:** $EP \leftrightarrow K_1P \wedge \dots \wedge K_nP$

Teoreema.

(i) P on **K**-pätevä joss $\forall x_1\tau(P, x_1)$ on pätevä predikaattilogiikassa.

(ii) $\Sigma \models_{\mathbf{K}} \emptyset \implies P$ joss $\tau(\Sigma) \models_{\text{cl}} \forall x_1\tau(P, x_1)$

missä $\tau(\Sigma) = \{\forall x_1\tau(Q, x_1) \mid Q \in \Sigma\}$ ja \models_{cl} tarkoittaa loogista seuraavuutta predikaattilogiikassa.

- Modaaliologiikka **T**:

P on **T**-pätevä joss $\{\forall x_1R(x_1, x_1)\} \models_{\text{cl}} \forall x_1\tau(P, x_1)$.

- Modaaliologiikka **S5**:

P on **S5**-pätevä joss $\Sigma_{\mathbf{S5}} \models_{\text{cl}} \forall x_1\tau(P, x_1)$

missä $\Sigma_{\mathbf{S5}} = \{\forall x_1R(x_1, x_1), \forall x_1\forall x_2(R(x_1, x_2) \rightarrow R(x_2, x_1)),$
 $\forall x_1\forall x_2\forall x_3(R(x_1, x_2) \wedge R(x_2, x_3) \rightarrow R(x_1, x_3))\}$

Multimodaalilogiikat (II)

- Yleinen tietäminen (common knowledge): CP
 - $\mathcal{M}, s \Vdash CP$ joss $\mathcal{M}, s \Vdash E^k P$ kaikille $k = 1, 2, \dots$
 - $\boxed{\Rightarrow} \mathcal{M}, s \Vdash CP$ joss $\mathcal{M}, t \Vdash P$ kaikille $t \in S$, joille t on C-saavutettavissa tilasta s .
(Maailma t on C-saavutettavissa maailmasta s , jos on olemassa $k \geq 1$ ja jono $(s =)t_0, t_1, \dots, t_k(= t)$, jolle kaikilla $j = 0, \dots, k-1, t_j R_i t_{j+1}$ jollekin $i, 1 \leq i \leq n$.)
 - **Aksiooma:** $CP \rightarrow E(P \wedge CP)$
 - **Päätelysääntö:**

$$\frac{P \rightarrow E(Q \wedge P)}{P \rightarrow CQ}$$
 - Esim. $CP \rightarrow K_1K_2 \dots K_n P$ on **S5_n**-pätevä.

Laskennallinen vaativuus

Tehtävänasettelut

- Mallintarkastus (onko lause tosi mallissa)
- Toteutus (onko lauseella mallia)?
- Pätevyys
- Looginen seuraavuus

(i) Lause P on pätevä joss $\neg P$ *ei ole* toteutuva.

(ii) $\{\} \models_{\mathcal{L}} \{Q_1, \dots, Q_n\} \implies P$ joss
 $(Q_1 \wedge \dots \wedge Q_n) \rightarrow P$ on pätevä joss
 $Q_1 \wedge \dots \wedge Q_n \wedge \neg P$ *ei ole* toteutuva.

Tarkastellaan mallintarkastusta ja toteutuvuutta.

Toteutus

- Lauselogiikalle **NP**-täydellinen.
Kaikki modaalilogiikat sisältävät erikoistapauksena lauselogiikan.
 \Rightarrow Ne ovat **NP**-kuvia.
- Modaalilogiikoille **S5, KD45**: **NP**-täydellinen.
Näille logiikoille löytyy aina pieni vastamalli: (maailmojen määrä \simeq alilauseiden määrä).
 \Rightarrow Toteutus kuuluu luokkaan **NP**.
- Modaalilogiikoille **K, T, S4**: **PSPACE**-täydellinen.
Näille logiikoille vastamalli voi olla eksponentiaalinen lauseen kokoon nähden.
- Modaalilogiikoille **S5_n, KD45_n**: **PSPACE**-täydellinen.
- Modaalilogiikoille **S5_n^C, KD45_n^C**: **EXPTIME**-täydellinen.

Mallintarkastus

- Kaikilla käsittelyillä modaalilogiikoilla lauseen totuus annetun mallin annetussa maailmassa tarkastettavissa polynomisessa ajassa (suhteessa mallin ja lauseen kokoon).
- Näin ei ole kaikilla modaalilogiikoilla (esimerkiksi tietyt temporaalilogiikat).
- Kaikki ongelmat, jotka voidaan ratkaista polynomisessa ajassa, voidaan palauttaa propositionaaliseen mallintarkastukseen:
Boolean piirin arvonlaskeminen **P**-täydellinen ongelma!