Taulumenetelmä modaalilogiikalle

- On vaikeaa löytää Hilbert-tyylisiä todistuksia:
  Käytössä Modus Ponens -sääntö: jotta voidaan johtaa Q, täytyy johtaa P ja $P \to Q$. Mutta mikä on sopiva P?
  Esim. $\{A \to B, A \to C\} \models A \to (B \wedge C)$
  1. $A \to B$
  2. $A \to C$

  $\ldots$

  n. $(A \to B) \to ((A \to C) \to (A \to (B \wedge C)))$
- Alikaavaperiaate: lauseen Q todistuksessa tarvitaan vain Q:n alikaavoja.
  $\boxed{\Rightarrow}$ resoluutio, sekventtikalkyyli, taulumenetelmä.

Taulumenetelmä modaalilogiikalle K

- Otetaan käyttöön prefiksit, joiden ideana on antaa nimiä mahdollisille maailmoille siten, että nimistä voidaan nähdä, voidaanko nimetystä maailmasta saavuttaa toinen nimetty maailma.
- Prefiksi on ei-tyhjä äärellinen jono luonnollisia lukuja. Esim. $\langle 1 \rangle$ ja $\langle 11, 1, 1, 1, 111, 2 \rangle$ ovat prefiksejä.
- Prefiksoitu lause on muotoa σP, missä σ on prefiksi ja P lause. (Idea: P on tosi maailmassa nimeltä σ.) Esim. $\langle 1 \rangle (P \vee \neg P)$ ja $\langle 11, 1, 1, 111, 2 \rangle \Box\Box\Diamond P$ ovat prefiksoituja lauseita.
- σn on prefiksi, joka saadaan prefiksistä σ liittämällä sen perään luku n. Esim. jos $\sigma = \langle 1 \rangle$, $\sigma 11 = \langle 1, 11 \rangle$.
- Prefiksi muotoa σn on $\mathbf{K}$-saavutettavissa prefiksistä σ. Esim. $\langle 1, 11, 11 \rangle$ on $\mathbf{K}$-saavutettavissa prefiksistä $\langle 1, 11 \rangle$.

Taulusäännöt

Modaalilogiikan taulumenetelmä koostuu lauselogiikan säännöistä ja modaalisäännöistä.

- Lauselogiikan säännöt (prefiksoiduille lauseille):

$$\frac{\sigma\neg\neg P}{\sigma P} \qquad \frac{\sigma\alpha}{\begin{array}{c}\sigma\alpha_1\\ \sigma\alpha_2\end{array}} \qquad \frac{\sigma\beta}{\sigma\beta_1 \mid \sigma\beta_2}$$

Huom! Prefiksi ei muutu.

Esimerkki.

$$\begin{array}{lll}
1. & \langle 3,2,1\rangle \neg((\neg P \to Q) \to P) & \\
2. & \langle 3,2,1\rangle (\neg P \to Q) & (1) \\
3. & \langle 3,2,1\rangle \neg P & (1)
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll|lll}
4. & \langle 3,2,1\rangle \neg\neg P & (2) & 5. & \langle 3,2,1\rangle Q & (2) \\
6. & \langle 3,2,1\rangle P & (4) & & & \\
 & \times & & & &
\end{array}$$

Modaalisäännöt

Määritelmä. Prefiksi on haarassa
(i) tarjolla, jos se esiintyy haarassa,
(ii) rajoittamaton, jos ei ole minkään haarassa esiintyvän prefiksin alkuosa.

Esim. Prefiksi $\langle 1,1\rangle$ on prefiksien $\langle 1,1,12,3\rangle$ ja $\langle 1,1\rangle$ alkuosa.

- Modaalisäännöt

  $\Box$-sääntö: $$\frac{\sigma\Box P}{\sigma n P}$$
  mille tahansa tarjolla olevalle prefiksille σn.

  $\neg\Box$-sääntö: $$\frac{\sigma\neg\Box P}{\sigma n\neg P}$$
  rajoittamattomalle prefiksille σn.

Esimerkki.

1.	$\langle 1\rangle\neg(\Box P\rightarrow\Box\Box P)$	
2.	$\langle 1\rangle\Box P$	(1)
3.	$\langle 1\rangle\neg\Box\Box P$	(1)
4.	$\langle 1,1\rangle\neg\Box P$	(3)
5.	$\langle 1,1\rangle P$	(2)
6.	$\langle 1,1,1\rangle\neg P$	(4)
7.	$\langle 1,2\rangle\neg\Box P$	(3)
8.	$\langle 1,2,3\rangle\neg P$	(7)
9.	$\langle 1,2\rangle P$	(2)
	$\vdots$	

Taulutodistus

Määritelmä.

- Taulun haara on suljettu, jos se sisältää sekä σP että $\sigma\neg P$ jollekin lauseelle P ja prefiksille σ tai jos se sisältää lauseen $\sigma\bot$ tai lauseen $\sigma\neg\top$.
- Taulu on suljettu, jos jokainen sen haara on suljettu.
- Lauseen P todistus on taulu, jonka juurena on $\langle 1\rangle\neg P$ ja joka on suljettu.

Esimerkki. Lauseen $\Box(P\wedge Q)\rightarrow(\Box P\wedge\Box Q)$ taulutodistus.

1. $\langle 1\rangle\neg(\Box(P\wedge Q)\rightarrow(\Box P\wedge\Box Q))$
2. $\langle 1\rangle\Box(P\wedge Q)$ (1)
3. $\langle 1\rangle\neg(\Box P\wedge\Box Q)$ (1)

4.	$\langle 1\rangle\neg\Box P$	(3)	5.	$\langle 1\rangle\neg\Box Q$	(3)
6.	$\langle 1,2\rangle\neg P$	(4)	9.	$\langle 1,3\rangle\neg Q$	(5)
7.	$\langle 1,2\rangle P\wedge Q$	(2)	10.	$\langle 1,3\rangle P\wedge Q$	(2)
8.	$\langle 1,2\rangle P$	(7)	11.	$\langle 1,3\rangle Q$	(10)
	$\times$			$\times$	

Virheettömyys (soundius)

Teoreema. Jos lauseelle P löytyy todistus, lause P on $\mathbf{K}$-pätevä.

Todistus. (Seuraavien osatulosten avulla)

- Määritellään taululle $\mathbf{K}$-toteutuvuus: taulu on $\mathbf{K}$-toteutuva, jos sen jokin haara "vastaa" mallia.
- Osoitetaan, että (i) $\mathbf{K}$-toteutuva taulu ei voi sulkeutua,
  (ii) jos P ei ole $\mathbf{K}$-pätevä, taulu $\langle 1 \rangle \neg P$ on $\mathbf{K}$-toteutuva,
  (iii) jokainen sääntö säilyttää $\mathbf{K}$-toteutuvuuden: jos taulu on $\mathbf{K}$-toteutuva ennen säännön soveltamista, se on $\mathbf{K}$-toteutuva myös säännön soveltamisen jälkeen.

  Tällöin jos P ei ole $\mathbf{K}$-pätevä, lauseen $\langle 1 \rangle \neg P$ taulu säilyy avoimena.

$\boxed{\Rightarrow}$ Jos taulu lauseelle $\langle 1 \rangle \neg P$ on suljettu, lause P on $\mathbf{K}$-pätevä.

Määritelmä. Taulu on $\mathbf{K}$-toteutuva, jos joku sen haaroista on $\mathbf{K}$-toteutuva.

Taulun haara on $\mathbf{K}$-toteutuva, jos haarassa esiintyvien prefiksoitujen lauseiden joukko on $\mathbf{K}$-toteutuva.

Prefiksoitujen lauseiden joukko Σ on $\mathbf{K}$-toteutuva, jos löytyy malli $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$ ja kuvaus $\mathcal{N}$ Σ:ssa esiintyvistä prefikseistä joukolle S s.e.

1. Jos prefiksit σ ja τ esiintyvät joukossa Σ ja τ on $\mathbf{K}$-saavutettavissa prefiksistä σ, tällöin $\mathcal{N}(\sigma) R \mathcal{N}(\tau)$.
2. Jos $\sigma P \in \Sigma$, niin $\mathcal{M}, \mathcal{N}(\sigma) \Vdash P$.

$\boxed{\Rightarrow}$ (i) $\mathbf{K}$-toteutuva taulu ei voi sulkeutua.

$\boxed{\Rightarrow}$ (ii) Jos lause P ei ole $\mathbf{K}$-pätevä, taulu $\langle 1 \rangle \neg P$ on $\mathbf{K}$-toteutuva.

(ii) pätee, sillä lauseella $\neg P$ on malli $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$, jolle $\mathcal{M}, s' \Vdash \neg P$. Siis haara $\{\langle 1 \rangle \neg P\}$ on $\mathbf{K}$-toteutuva kuvauksella $\mathcal{N}(\langle 1 \rangle) = s'$.

(iii) Olkoon taulu Γ $\mathbf{K}$-toteutuva.
Taulussa Γ on haara, jonka lauseet Σ ovat $\mathbf{K}$-toteutuvia mallilla $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$ ja kuvauksella $\mathcal{N}$.

Osoitetaan, että kun sovelletaan mitä tahansa taulusääntöä, näin saatava taulu Γ' on myös $\mathbf{K}$-toteutuva.

Sovelletaan taulusääntöä $\mathbf{K}$-toteutuvaan haaraan Σ

- $\dfrac{\sigma\beta}{\sigma\beta_1 \mid \sigma\beta_2}$

  Tällöin taulussa Γ' haarat, joiden lausejoukot
  $\Sigma_1 = \Sigma \cup \{\sigma\beta_1\}$ ja $\Sigma_2 = \Sigma \cup \{\sigma\beta_2\}$
  Koska $\sigma\beta \in \Sigma$, $\mathcal{M}, \mathcal{N}(\sigma) \Vdash \beta$, joten $\mathcal{M}, \mathcal{N}(\sigma) \Vdash \beta_1$ tai $\mathcal{M}, \mathcal{N}(\sigma) \Vdash \beta_2$.
  $\boxed{\Rightarrow}$ Γ' $\mathbf{K}$-toteutuva.

- $\dfrac{\sigma\alpha}{\begin{array}{c}\sigma\alpha_1 \\ \sigma\alpha_2\end{array}}$ Samaan tapaan.

- $\dfrac{\sigma\Box P}{\sigma n P}$ tarjolla olevalle prefiksille σn.

  Tällöin taulussa Γ' haara, jonka lausejoukko $\Sigma_1 = \Sigma \cup \{\sigma n P\}$.
  Koska $\sigma\Box P \in \Sigma$, $\mathcal{M}, \mathcal{N}(\sigma) \Vdash \Box P$, joten kaikille t, $\mathcal{N}(\sigma) R t$, $\mathcal{M}, t \Vdash P$.
  Koska σn on $\mathbf{K}$-saavutettavissa σ:sta, $\mathcal{N}(\sigma) R \mathcal{N}(\sigma n)$. Siis $\mathcal{M}, \mathcal{N}(\sigma n) \Vdash P$.
  $\boxed{\Rightarrow}$ Γ' $\mathbf{K}$-toteutuva.

- $\dfrac{\sigma\neg\Box P}{\sigma n\neg P}$ rajoittamattomalle prefiksille σn.

Tällöin taulussa Γ' haara, jonka lausejoukko $\Sigma_1 = \Sigma \cup \{\sigma n\neg P\}$.

Koska $\sigma\neg\Box P \in \Sigma$, $\mathcal{M}, \mathcal{N}(\sigma) \Vdash \neg\Box P$, joten on olemassa t, $\mathcal{N}(\sigma)Rt$, $\mathcal{M}, t \Vdash \neg P$.

Koska σn ei ole mikään Σ prefiksin alkuosa, kuvausta $\mathcal{N}$ voidaan laajentaa: $\mathcal{N}(\sigma n) = t$. Tällöin $\mathcal{M}, \mathcal{N}(\sigma n) \Vdash \neg P$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Γ' **K**-toteutuva. ■

Täydellisyys

Miten taata, että jokaiselle pätevälle lauseelle löytyy taulutodistus, kun taulun haarat voivat olla äärettömiä? Milloin sääntöjä on sovellettu riittävästi/reilusti?

$\boxed{\Rightarrow}$ Taulun rakentamiseen tarvitaan systemaattinen menetelmä, jossa kaikkia sääntöjä on käytetty riittävästi eli jokaiselle avoimelle haaralle θ pätee:

(i) Jos $\sigma\neg\neg P \in \theta$, tällöin $\sigma P \in \theta$.
(ii) Jos $\sigma\beta \in \theta$, tällöin $\sigma\beta_1 \in \theta$ tai $\sigma\beta_2 \in \theta$.
(iii) Jos $\sigma\alpha \in \theta$, tällöin $\sigma\alpha_1 \in \theta$ ja $\sigma\alpha_2 \in \theta$.
(iv) Jos $\sigma\neg\Box Q \in \theta$, $\sigma n\neg Q \in \theta$, jollakin n.
(v) Jos $\sigma\Box Q \in \theta$, $\sigma n Q \in \theta$ kaikilla σn, jotka tarjolla θ:ssa.

Huom! Systemaattinen menetelmä takaa täydellisyyden mutta voi sallia äärettömät taulut, jossei todistettava lause ole pätevä.
Ratkaisumenetelmä takaa, että taulun rakentaminen päättyy äärellisellä askelmäärällä, olipa todistettava lause pätevä tai ei.

Systemaattinen **K**-taulu lauseelle P:

1. Taulun juureksi $\langle 1\rangle\neg P$.
2. WHILE taulu ei suljettu eikä kaikkia lauseita merkitty käytetyiksi DO BEGIN
2.1 Valitaan taulusta ylin käyttämätön solmu σQ.
2.2 Jos Q ei literaali, jokaiselle avoimelle σQ kautta kulkevalle haaralle θ:

- Jos σQ muotoa $\sigma\alpha$, lisätään haaran θ loppuun ensin $\sigma\alpha_1$ ja sitten $\sigma\alpha_2$.
- Jos σQ on muotoa $\sigma\beta$, lisätään θ:n loppuun kaksi lapsisolmua $\sigma\beta_1$ ja $\sigma\beta_2$ (haarautuminen).
- Jos σQ on muotoa $\sigma\neg\Box P$, lisätään haaran θ loppuun solmu $\sigma n\neg P$ jollekin tässä haarassa rajoittamattomalle σn.
- Jos σQ on muotoa $\sigma\Box P$, kaikille tässä haarassa tarjolla oleville σn lisätään haaran θ loppuun solmu $\sigma n P$ sekä $\boxed{\text{lisäksi solmu } \sigma\Box P}$.

2.3 Merkitään σQ käytetyksi.
END.

Teoreema. (**Täydellisyys**) Jos P on **K**-pätevä, lauseen P systemaattinen **K**-taulu sulkeutuu.

Todistus. Osoitetaan, että jos lauseen P systemaattisessa **K**-taulussa on avoin haara, P ei ole **K**-pätevä.

Olkoon θ valmiin systemaattisen taulun avoin haara ja olkoon $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$ seuraava malli (vastamalli).
1. S on θ:ssa esiintyvien prefiksien joukko.
2. $\sigma R\tau$ joss τ on **K**-saavutettavissa σ:sta.
3. $v(\sigma, Q) = \mathrm{true}$ joss σQ esiintyy θ:ssa atomilauseelle Q.

Teoreema seuraa seuraavasta tuloksesta: jos $\sigma Q \in \theta$, niin $\mathcal{M}, \sigma \Vdash Q$ (joka todistetaan alla).

Teoreema seuraa ko. tuloksesta, koska $\langle 1\rangle\neg P$ kuuluu jokaiseen haaraan, jolloin $\mathcal{M}, \langle 1\rangle \Vdash \neg P$, mikä tarkoittaa, että P ei ole **K**-pätevä.

Todistetaan siis induktiolla lauseen Q pituuden suhteen:

$$\text{jos } \sigma Q \in \theta,\ \mathcal{M}, \sigma \Vdash Q.$$

- (Q atomilause) Jos $\sigma Q \in \theta$, niin $v(\sigma, Q) = \text{true}$ ja $\mathcal{M}, \sigma \Vdash Q$.
  (Q atomilauseen negaatio) Jos $\sigma \neg Q' \in \theta$ ja Q' on atomilause, niin $\sigma Q' \notin \theta$, joten $\mathcal{M}, \sigma \nVdash Q'$ ja $\mathcal{M}, \sigma \Vdash \neg Q'$.

Induktiohypoteesi [IH]:
Jos Q on lyhyempi kuin j ja $\sigma Q \in \theta$, tällöin $\mathcal{M}, \sigma \Vdash Q$.

Olkoon lauseen Q pituus j. Nyt Q on jokin seuraavista:

- (Muotoa $\neg\neg Q$) Jos $\sigma \neg\neg Q \in \theta$, tällöin $\sigma Q \in \theta$. [IH] $\mathcal{M}, \sigma \Vdash Q$.
  Täten $\mathcal{M}, \sigma \Vdash \neg\neg Q$.

- (β-lause) Jos $\sigma\beta \in \theta$, tällöin $\sigma\beta_1 \in \theta$ tai $\sigma\beta_2 \in \theta$.
  [IH] $\mathcal{M}, \sigma \Vdash \beta_1$ tai $\mathcal{M}, \sigma \Vdash \beta_2$. Täten $\mathcal{M}, \sigma \Vdash \beta$.
- (α-lause) Jos $\sigma\alpha \in \theta$, tällöin $\sigma\alpha_1 \in \theta$ ja $\sigma\alpha_2 \in \theta$.
  [IH] $\mathcal{M}, \sigma \Vdash \alpha_1$ ja $\mathcal{M}, \sigma \Vdash \alpha_2$. Täten $\mathcal{M}, \sigma \Vdash \alpha$.
- (Muotoa $\neg\Box Q$) Jos $\sigma\neg\Box Q \in \theta$, $\sigma n \neg Q \in \theta$ jollakin n.
  [IH] $\mathcal{M}, \sigma n \Vdash \neg Q$. Siis $\mathcal{M}, \sigma \nVdash \Box Q$, koska $\sigma R \sigma n$.
- (Muotoa $\Box Q$) Jos $\sigma\Box Q \in \theta$, $\sigma n Q \in \theta$ kaikilla σn, jotka tarjolla θ:ssa. [IH] $\mathcal{M}, \sigma n \Vdash Q$. Täten $\mathcal{M}, \sigma \Vdash \Box Q$.

Siis jokaiselle avoimelle haaralle θ:
jos $\sigma Q \in \theta$, niin $\mathcal{M}, \sigma \Vdash Q$. ■

Esimerkki. Tutkitaan, onko $\Box P \rightarrow \Box\Box P$ $\mathbf{K}$-pätevä.
Rakennetaan systemaattinen $\mathbf{K}$-taulu:

1.	$\langle 1\rangle \neg(\Box P \rightarrow \Box\Box P)$	
2.	$\langle 1\rangle \Box P$	(1)
3.	$\langle 1\rangle \neg\Box\Box P$	(1)
4.	$\langle 1\rangle \Box P$	(2)
5.	$\langle 1,2\rangle \neg\Box P$	(3)
6.	$\langle 1,2\rangle P$	(4)
7.	$\langle 1\rangle \Box P$	(4)
8.	$\langle 1,2,3\rangle \neg P$	(5)
9.	$\langle 1,2\rangle P$	(7)
10.	$\langle 1\rangle \Box P$	(7)
	$\ldots$	

Koska taulu jää auki, voidaan avoimesta haarasta koota vastamalli $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$, missä
$S = \{\langle 1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,2,3\rangle\}$
$R = \{\langle\langle 1\rangle, \langle 1,2\rangle\rangle, \langle\langle 1,2\rangle, \langle 1,2,3\rangle\rangle\}$
ja $v(\sigma, P) = \text{true}$ joss $\sigma = \langle 1,2\rangle$.
Nyt $\mathcal{M}, \langle 1\rangle \nVdash \Box P \rightarrow \Box\Box P$.

Muut modaalilogiikat

Laajennetaan edellä esitetty taulumenetelmä käsittelemään myös muita modaalilogiikoita kuin $\mathbf{K}$.

Määritelmä. Prefiksi τ on prefiksin σ yksinkertainen jatko, jos τ on muotoa σn jollekin n.

Taulumenetelmä modaalilogiikalle $\mathbf{L}$:

$\neg\Box$-sääntö:

$$\frac{\sigma\neg\Box P}{\tau\neg P} \qquad\qquad \frac{\sigma\Diamond P}{\tau P}$$

missä τ on haarassa rajoittamaton prefiksin σ yksinkertainen jatko.

$\Box$-sääntö:

$$\frac{\sigma\Box P}{\tau P} \qquad \frac{\sigma\neg\Diamond P}{\tau\neg P}$$

missä τ $\mathbf{L}$-saavutettavissa prefiksistä σ ja

1. logiikoille $\mathbf{K}, \mathbf{KB}, \mathbf{K4}$ (huom. ei-sarjallisia)
   τ on tarjolla haarassa;
2. logiikoille $\mathbf{D}, \mathbf{T}, \mathbf{DB}, \mathbf{B}, \mathbf{D4}, \mathbf{S4}, \mathbf{S5}$ (huom. sarjallisia)
   (i) τ on tarjolla haarassa tai
   (ii) τ on rajoittamaton prefiksin σ yksinkertainen jatko.

Määritelmä. Prefiksien saavutettavuusrelaatio:

1. yleinen, jos σn on saavutettavissa prefiksistä σ kaikilla n;
2. käänteinen, jos σ on saavutettavissa prefiksistä σn kaikilla n;
3. refleksiivinen, jos σ on saavutettavissa σ:sta;
4. transitiivinen, jos τ on saavutettavissa prefiksistä σ aina, kun σ on τ:n aito alkuosa.
5. universaalinen, jos prefiksi on saavutettavissa mistä tahansa prefiksistä.

Logiikka $\mathbf{L}$	$\mathbf{L}$-saavutettavuus
$\mathbf{K}, \mathbf{D}$	yleinen
$\mathbf{T}$	yleinen, refleksiivinen
$\mathbf{KB}, \mathbf{DB}$	yleinen, käänteinen
$\mathbf{B}$	yleinen, refleksiivinen, käänteinen
$\mathbf{K4}, \mathbf{D4}$	yleinen, transitiivinen
$\mathbf{S4}$	yleinen, refleksiivinen, transitiivinen
$\mathbf{S5}$	universaali

Esimerkkejä

$\mathbf{D}$-taulutodistus lauseelle $\Box P \rightarrow \neg\Box\neg P$.

1.	$\langle 1\rangle\neg(\Box P \rightarrow \neg\Box\neg P)$	
2.	$\langle 1\rangle\Box P$	(1)
3.	$\langle 1\rangle\neg\neg\Box\neg P$	(1)
4.	$\langle 1\rangle\Box\neg P$	(3)
5.	$\langle 1,2\rangle\neg P$	(4) Huom. 2.(ii)
6.	$\langle 1,2\rangle P$	(2)

$\times$

$\mathbf{T}$-taulutodistus lauseelle $\Box P \to P$.

1.	$\langle 1 \rangle \neg(\Box P \to P)$	
2.	$\langle 1 \rangle \Box P$	(1)
3.	$\langle 1 \rangle \neg P$	(1)
4.	$\langle 1 \rangle P$	(2) Huom. refleksiivisyys
	$\times$	

$\mathbf{K4}$-taulutodistus lauseelle $\Box P \to \Box\Box P$.

1.	$\langle 1 \rangle \neg(\Box P \to \Box\Box P)$	
2.	$\langle 1 \rangle \Box P$	(1)
3.	$\langle 1 \rangle \neg\Box\Box P$	(1)
4.	$\langle 1, 2 \rangle \neg\Box P$	(3)
5.	$\langle 1, 2, 3 \rangle \neg P$	(4)
6.	$\langle 1, 2, 3 \rangle P$	(2) Huom. transit.
	$\times$	

$\mathbf{KB}$-taulutodistus lauseelle $P \to \Box\Diamond P$.

1.	$\langle 1 \rangle \neg(P \to \Box\Diamond P)$	
2.	$\langle 1 \rangle P$	(1)
3.	$\langle 1 \rangle \neg\Box\Diamond P$	(1)
4.	$\langle 1, 2 \rangle \neg\Diamond P$	(3)
5.	$\langle 1 \rangle \neg P$	(4) Huom. käänteisyys
	$\times$	

Systemaattinen $\mathbf{L}$-taulu lauseelle P

Kuten logiikalle $\mathbf{K}$, mutta kohta 2.2 tarkennettuna:

2.2 Jos Q ei literaali, jokaiselle σQ kautta kulkevalle avoimelle haaralle θ:

- Jos σQ on muotoa $\sigma\neg\Box P$ ($\sigma\Diamond P$), lisätään haaran θ loppuun solmu $\sigma n \neg P$ ($\sigma n P$) jollekin tässä haarassa rajoittamattomalle σn.
- Jos σQ on muotoa $\sigma\Box P$ ($\sigma\neg\Diamond P$),
  (a) kun $\mathbf{L}$ on $\mathbf{K}, \mathbf{KB}, \mathbf{K4}, \mathbf{T}, \mathbf{B}, \mathbf{S4}, \mathbf{S5}$:
  jokaiselle θ:ssa tarjolla olevalle σ', joka on $\mathbf{L}$-saavutettavissa σ:sta, lisätään θ:n loppuun solmu $\sigma' P$ ($\sigma' \neg P$) ja lopuksi $\sigma\Box P$ ($\sigma\neg\Diamond P$).
  (b) kun $\mathbf{L}$ on $\mathbf{D}, \mathbf{DB}, \mathbf{D4}$:
  jokaiselle θ:ssa tarjolla olevalle σ', joka on $\mathbf{L}$-saavutettavissa σ:sta, lisätään θ:n loppuun solmu $\sigma' P$ ($\sigma' \neg P$). Jos tällaisia prefiksejä σ' ei ole, lisätään θ:n loppuun solmu $\sigma n P$ ($\sigma n \neg P$) jollekin tässä haarassa rajoittamattomalle σn. Kummassakin tapauksessa lisätään vielä haaran loppuun $\sigma\Box P$ ($\sigma\neg\Diamond P$).

S5-taulut

Prefikseinä riittävät luonnolliset luvut.

$\neg\Box$-sääntö: $\dfrac{n\neg\Box P}{k\neg P}$ $\dfrac{n\Diamond P}{kP}$

missä k ei esiinny haarassa.

$\Box$-sääntö: $\dfrac{n\Box P}{kP}$ $\dfrac{n\neg\Diamond P}{k\neg P}$

mille tahansa k.

Esimerkki. S5-taulutodistus lauseelle $\neg\Box P \rightarrow \Box\neg\Box P$.

1.	$1\neg(\neg\Box P \rightarrow \Box\neg\Box P)$	
2.	$1\neg\Box P$	(1)
3.	$1\neg\Box\neg\Box P$	(1)
4.	$2\neg P$	(2)
5.	$3\neg\neg\Box P$	(3)
6.	$3\Box P$	(5)
7.	$2P$	(6)

$\times$

Systemaattinen menetelmä (**S5**-pätevyydelle):

1. Taulun juureksi $1\neg P$.
2. WHILE taulu ei suljettu eikä kaikkia lauseita merkitty käytetyiksi DO BEGIN

2.1 Valitaan taulusta ylin käyttämätön solmu nQ.

2.2 Jos Q ei ole literaali, jokaiselle avoimelle haaralle θ, joka kulkee nQ kautta:

- Jos nQ muotoa $n\alpha$, lisätään haaran θ loppuun ensin $n\alpha_1$ ja sitten $n\alpha_2$.
- Jos nQ on muotoa $n\beta$, lisätään θ:n loppuun kaksi lapsisolmua $n\beta_1$ ja $n\beta_2$.
- Jos nQ on muotoa $n\neg\Box P$, lisätään haaran θ loppuun solmu $k\neg P$ jollekin tässä haarassa rajoittamattomalle k sekä tämän jälkeen kX kullekin haarassa esiintyvälle $j\Box X$.
- Jos nQ on muotoa $n\Box P$, kaikille tässä haarassa tarjolla oleville k lisätään haaran θ loppuun solmu kP.

2.3 Merkitään nQ käytetyksi.

END.

KD45-taulut

Prefikseinä riittävät luonnolliset luvut.

$\neg\Box$-sääntö: $\dfrac{n\neg\Box P}{k\neg P}$ $\dfrac{n\Diamond P}{kP}$

missä k ei esiinny haarassa.

$\Box$-sääntö: $\dfrac{n\Box P}{kP}$ $\dfrac{n\neg\Diamond P}{k\neg P}$

mille tahansa $k \neq 1$.

Esimerkki. Vertaa seuraavia $\mathbf{KD45}$-tauluja.

$$
\begin{array}{lllll}
(\Box P \rightarrow P): & 1. & 1\neg(\Box P \rightarrow P) & \\
 & 2. & 1\Box P & (1) \\
 & 3. & 1\neg P & (1)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llll}
\Box(\Box P \rightarrow P): & 1. & 1\neg\Box(\Box P \rightarrow P) & \\
 & 2. & 2\neg(\Box P \rightarrow P) & (1) \\
 & 3. & 2\Box P & (2) \\
 & 4. & 2\neg P & (2) \\
 & 5. & 2P & (3) \\
 & & \times &
\end{array}
$$

Looginen seuraavuus

Tehtävä: $\Sigma \models_{\mathbf{L}} \Upsilon \Longrightarrow P$

Taulumenetelmä: asetetaan taulun juureksi $\langle 1 \rangle \neg P$ ja käytetään taulun rakentamiseen $\mathbf{L}$-logiikan mukaisia taulusääntöjä, joiden lisäksi voidaan käyttää kahta uutta sääntöä premisseille:

Globaali sääntö: solmulla σQ voidaan jatkaa mitä tahansa haaraa mille tahansa haarassa tarjolla olevalla prefiksillä σ ja mille tahansa globaalille premissille $Q \in \Sigma$.

Lokaali sääntö: solmulla $\langle 1 \rangle Q$ voidaan jatkaa mitä tahansa haaraa mille tahansa lokaalille premissille $Q \in \Upsilon$.

Esimerkki. $\{P\} \models_{\mathbf{K}} \{\Box P \rightarrow Q\} \Longrightarrow Q$:

$$
\begin{array}{lll}
1. & \langle 1 \rangle \neg Q & \\
2. & \langle 1 \rangle \Box P \rightarrow Q & \text{(LP)}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll|lll}
3. & \langle 1 \rangle \neg\Box P & (2) & 4. & \langle 1 \rangle Q & (2) \\
5. & \langle 1,2 \rangle \neg P & (2) & & \times & \\
6. & \langle 1,2 \rangle P & \text{(GP)} & & & \\
 & \times & & & &
\end{array}
$$