

Modaalilogiikojen todistusteoriaa

Todistusteoria: (syntaktinen) kalkyyli, jolla osoitetaan, että annettu lause on pätevä/seuraa loogisesti lausejoukosta.

⇒ Automatisointi

- Aksiomaattinen (Hilbert-tyyppinen) todistusteoria
- Luonnollisen päättelyn menetelmät
- Taulumenetelmät
- Resoluutio

Johto ja todistus

(Käsitellään ensin tapausta, jossa ei ole käytössä lokaaleja premissejä.)

Määritelmä. Lauseen P **K-johto** lausejoukosta Σ on äärellinen jono lauseita $\phi_1, \dots, \phi_n$ siten, että $\phi_n = P$ ja kaikille $i = 1, \dots, n$

1. $\phi_i \in \Sigma$ tai
2. ϕ_i on joku **K**:n aksioomeista tai
3. ϕ_i saadaan Modus Ponens -säännöllä tai N-säännöllä jonon aiemmista lauseista.

Merkintätapa: $\Sigma \vdash_K \emptyset \implies P$ (tai $\Sigma \vdash_K P$)

Lauseen P **K-todistus** on lauseen P **K-johto** tyhjästä lausejoukosta.

Merkintätapa: $\emptyset \vdash_K \emptyset \implies P$ (tai $\vdash_K P$)

Hilbert-tyylinen todistusteoria

Modaalilogiikalle **K**:

Klassiset aksioomat: Kaikki tautologiat.

Modaaliaksiomat: Kaikki muotoa

$$\Box(P \rightarrow Q) \rightarrow (\Box P \rightarrow \Box Q)$$

olevat lauseet.

Modus Ponens -sääntö: $\frac{P, P \rightarrow Q}{Q}$

Välttämättömyyssääntö (N-sääntö): $\frac{P}{\Box P}$

Esimerkki. $\top \leftrightarrow \Box \top$ on **K**-todistuva.

- | | |
|---|------------|
| 1. $\top$ | (Taut) |
| 2. $\Box \top \rightarrow (\top \rightarrow \Box \top)$ | (Taut) |
| 3. $\Box \top$ | (N, 1) |
| 4. $\top \rightarrow \Box \top$ | (MP, 2, 3) |
| 5. $\top \rightarrow (\Box \top \rightarrow \top)$ | (Taut) |
| 6. $\Box \top \rightarrow \top$ | (MP, 1, 5) |
| 7. $(\Box \top \rightarrow \top) \rightarrow ((\top \rightarrow \Box \top) \rightarrow (\top \leftrightarrow \Box \top))$ | (Taut) |
| 8. $(\top \rightarrow \Box \top) \rightarrow (\top \leftrightarrow \Box \top)$ | (MP, 6, 7) |
| 9. $\top \leftrightarrow \Box \top$ | (MP, 4, 8) |

Johdettuja sääntöjä (I)

R-sääntö

$$\frac{P \rightarrow Q}{\Box P \rightarrow \Box Q}$$

1. $P \rightarrow Q$
2. $\Box(P \rightarrow Q)$ (N, 1)
3. $\Box(P \rightarrow Q) \rightarrow (\Box P \rightarrow \Box Q)$ (K)
4. $\Box P \rightarrow \Box Q$ (MP, 2, 3)

Yleistetty R-sääntö

$$\frac{P_1 \wedge \dots \wedge P_n \rightarrow Q}{\Box P_1 \wedge \dots \wedge \Box P_n \rightarrow \Box Q}$$

Virheettömyys

Todistusmenetelmän virheettömyys:

Jos lause on johdettavissa, se on myös looginen seuraus.

Teoreema. Jos $\Sigma \vdash_K \emptyset \implies P$, niin $\Sigma \models_K \emptyset \implies P$
(lyhyemmin merkittynä: jos $\Sigma \vdash_K P$, niin $\Sigma \models_K P$).

Todistus. Olkoon lauseelle P K -johto $\phi_1, \dots, \phi_n (= P)$ lausejoukosta Σ .
Todistetaan induktiolla kaikille $i = 1, \dots, n$, $\Sigma \models_K \phi_i$ osoittamalla, että ϕ_i on pätevä jokaisessa mallissa, jossa Σ on pätevä.

Siis todistetaan induktiolla kaikille $i = 1, \dots, n$, $C \models \phi_i$,
missä $C = \{M \mid M \models \Sigma\}$.

Johdettuja sääntöjä (II)

$$\mathbf{R}\Diamond\text{-sääntö} : \frac{P \rightarrow Q}{\Diamond P \rightarrow \Diamond Q}$$

1. $P \rightarrow Q$
2. $(P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$ (Taut)
3. $\neg Q \rightarrow \neg P$ (MP, 1, 2)
4. $\Box \neg Q \rightarrow \Box \neg P$ (R, 3)
5. $(\Box \neg Q \rightarrow \Box \neg P) \rightarrow$
 $(\neg \Box \neg P \rightarrow \neg \Box \neg Q)$ (Taut)
6. $\neg \Box \neg P \rightarrow \neg \Box \neg Q$ (MP, 4, 5)

Induktiotodistus:

- ($i = 1$)
Jos $\phi_1 \in \Sigma$, selvästi $C \models \phi_1$.
Jos ϕ_1 on klassinen tautologia tai muotoa
 $\Box(P \rightarrow Q) \rightarrow (\Box P \rightarrow \Box Q)$, niin $C \models \phi_1$ jokaiselle mallijoukolle C
[Mahd. maailmojen semantiikan perusteoreema]
- ($i > 1$)
Kuten yllä, jos $\phi_i \in \Sigma$, on klassinen tautologia tai muotoa
 $\Box(P \rightarrow Q) \rightarrow (\Box P \rightarrow \Box Q)$, niin $C \models \phi_i$.
Jos ϕ_i on saatu jonon aiemmista lauseista MP- tai N-säännöllä,
induktio-oletuksen mukaan ko. aiemmat lauseet ovat C -päteviä.
Koska C -pätevien lauseiden joukko on suljettu MP- ja N-säännön
suhteen [Mahd. maailmojen semantiikan perusteoreema], $C \models \phi_i$.

Siis kaikille $i = 1, \dots, n$, ϕ_i on C -pätevä, joten $\Sigma \models_K \phi_i$.

Näin ollen $\Sigma \models_K P (= \phi_n)$. ■

Täydellisyys

Todistusmenetelmän täydellisyys:

Jos lause looginen seuraus, se on myös johdettavissa.

Teoreema. Jos $\Sigma \models_K P$, niin $\Sigma \vdash_K P$.

Todistus. Oletetaan, että lauseelle P ei ole olemassa **K**-johtoa lausejoukosta Σ .

Osoitetaan, että $\Sigma \models_K P$ ei päde.

Tämä tehdään muodostamalla **kanoninen malli** $\mathcal{M}$:

siinä kaikki joukon Σ lauseet ovat päteviä ja kaikilla P , joille $\Sigma \vdash_K P$ ei päde, on olemassa mallin maailma s , jossa $\mathcal{M}, s \not\models P$.

Mallin maailmat **maksimaalisesti konsistenttejä** lausejoukkoja, jotka konstruoidaan **Lindenbaumin lemmän** avulla premissijoukosta Σ .

2. Jos joukko **A** on Σ -konsistentti ja $\neg \Box Z \in \mathbf{A}$, $\mathbf{A}^\# \cup \{\neg Z\}$ on myös Σ -konsistentti, missä $\mathbf{A}^\# = \{Q \mid \Box Q \in \mathbf{A}\}$.

Oletetaan, että $\mathbf{A}^\# \cup \{\neg Z\}$ on Σ -epäkonsistentti.

Tällöin on olemassa $\{A_1, \dots, A_n\} \subseteq \mathbf{A}^\#$, jolle $\Sigma \vdash_K \neg(\top \wedge A_1 \wedge \dots \wedge A_n \wedge \neg Z)$.

(koska $\neg(\top \wedge A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow \neg(\top \wedge A_1 \wedge \dots \wedge A_n \wedge \neg Z)$ on tautologia).

Jatketaan johtoa:

Äärellistä joukkoa $\mathbf{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ sanotaan **Σ -epäkonsistentiksi**, jos $\Sigma \vdash_K \neg(\top \wedge A_1 \wedge \dots \wedge A_n)$.

(Huom! Tyhjä joukko on Σ -epäkonsistentti, jos $\Sigma \vdash_K \neg \top$.)

Joukkoa **A** sanotaan **Σ -konsistentiksi**, jos mikään sen äärellinen alijoukko ei ole Σ -epäkonsistentti.

Koska oletimme, että lauseelle P ei ole olemassa **K**-johtoa lausejoukosta Σ , $\{\neg P\}$ on Σ -konsistentti. ($\emptyset$ on myös Σ -konsistentti, koska $\neg \top \rightarrow P$ on **K**-todistuva/tautologia.)

1. Jos joukko **S** on Σ -konsistentti, niin on myös jokainen sen alijoukko.

Jos jokin alijoukko ei olisi Σ -konsistentti, olisi olemassa sen Σ -epäkonsistentti alijoukko A , mutta $A \subseteq S$, joten S ei olisi Σ -konsistentti, ristiriita.

1. $\neg(\top \wedge A_1 \wedge \dots \wedge A_n \wedge \neg Z)$
2. $\neg \top \vee \neg A_1 \vee \dots \vee \neg A_n \vee Z$ (Prop, 1)
3. $(\top \wedge A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow Z$ (Prop, 2)
4. $(\Box \top \wedge \Box A_1 \wedge \dots \wedge \Box A_n) \rightarrow \Box Z$ (GR, 3)
5. $\Box \top \rightarrow ((\Box A_1 \wedge \dots \wedge \Box A_n) \rightarrow \Box Z)$ (Prop, 4)
6. $\top \rightarrow \Box \top$ (Ks. s. 4)
7. $\top \rightarrow ((\Box A_1 \wedge \dots \wedge \Box A_n) \rightarrow \Box Z)$ (Prop, 5, 6)
8. $(\top \wedge \Box A_1 \wedge \dots \wedge \Box A_n) \rightarrow \Box Z$ (Prop, 7)
9. $\neg(\top \wedge \Box A_1 \wedge \dots \wedge \Box A_n \wedge \neg \Box Z)$ (Prop, 8)

$\Rightarrow$ **A** on Σ -epäkonsistentti (ristiriita), joten $\mathbf{A}^\# \cup \{\neg Z\}$ Σ -konsistentti.



3. Lindenbaumin Lemma. Jokainen Σ -konsistentti joukko voidaan laajentaa maksimaalisesti Σ -konsistentiksi joukoksi.

(Γ on maksimaalisesti Σ -konsistentti, jos kaikilla $\Gamma' \supset \Gamma$, Γ' on Σ -epäkonsistentti.)

Olkoon $\mathbf{A}$ Σ -konsistentti.

Järjestetään kaikki modaalilauseet jonoon

$Q_0, Q_1, \dots$ ja määritellään:

$$\Delta_0 = \mathbf{A}.$$

$$\Delta_i = \begin{cases} \Delta_{i-1} \cup \{Q_{i-1}\} & \text{jos } \Delta_{i-1} \cup \{Q_{i-1}\} \text{ } \Sigma\text{-konsistentti} \\ \Delta_{i-1} \cup \{\neg Q_{i-1}\} & \text{muutoin} \end{cases}$$

$$\Delta = \bigcup_{i \geq 0} \Delta_i$$



Jatketaan johtoja:

1. $\neg(\top \wedge A_1^+ \wedge \dots \wedge A_{n+}^+ \wedge Q_{i-1})$
2. $\neg(\top \wedge A_1^- \wedge \dots \wedge A_{n-}^- \wedge \neg Q_{i-1})$
3. $Q_{i-1} \rightarrow \neg(\top \wedge A_1^+ \wedge \dots \wedge A_{n+}^+)$ (Prop, 1)
4. $\neg Q_{i-1} \rightarrow \neg(\top \wedge A_1^- \wedge \dots \wedge A_{n-}^-)$ (Prop, 2)
5. $\neg(\top \wedge A_1^+ \wedge \dots \wedge A_{n+}^+) \vee \neg(\top \wedge A_1^- \wedge \dots \wedge A_{n-}^-)$ (Prop, 3, 4)
6. $\neg(\top \wedge A_1^+ \wedge \dots \wedge A_{n+}^+ \wedge A_1^- \wedge \dots \wedge A_{n-}^-)$ (Prop, 5)

$\Rightarrow \Delta_{i-1}$ on Σ -epäkonsistentti, ristiriita.



(i) $\mathbf{A} \subseteq \Delta$

(ii) Kaikille $i = 0, 1, \dots$ Δ_i on Σ -konsistentti.

Δ_0 on Σ -konsistentti.

Olkoon Δ_{i-1} on Σ -konsistentti.

Oletetaan, että Δ_i on Σ -epäkonsistentti.

Tällöin $\Delta_i = \Delta_{i-1} \cup \{\neg Q_{i-1}\}$ ja

$\Delta_{i-1} \cup \{Q_{i-1}\}$ on Σ -epäkonsistentti.

Siis on olemassa $\{A_1^+, \dots, A_{n+}^+\} \subseteq \Delta_{i-1}$, jolle

$\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \neg(\top \wedge A_1^+ \wedge \dots \wedge A_{n+}^+ \wedge Q_{i-1})$

sekä $\{A_1^-, \dots, A_{n-}^-\} \subseteq \Delta_{i-1}$, jolle

$\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \neg(\top \wedge A_1^- \wedge \dots \wedge A_{n-}^- \wedge \neg Q_{i-1})$



(iii) Δ on Σ -konsistentti.

Oletetaan, että Δ on Σ -epäkonsistentti.

Siis on olemassa $\{A_1, \dots, A_n\} \subseteq \Delta$, jolle

$\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \neg(\top \wedge A_1 \wedge \dots \wedge A_n)$.

On olemassa $i \geq 0$, jolle $\{A_1, \dots, A_n\} \subseteq \Delta_i$.

$\Rightarrow \Delta_i$ on Σ -epäkonsistentti, ristiriita.

(iv) Δ on maksimaalisesti Σ -konsistentti.

Olkoon $\Delta \cup \{Z\}$ Σ -konsistentti.

Koska $Z = Q_i$ jollakin i , $\Delta \cup \{Q_i\}$ on Σ -konsistentti.

Koska $\Delta_i \cup \{Q_i\} \subseteq \Delta \cup \{Q_i\}$, $\Delta_i \cup \{Q_i\}$ on Σ -konsistentti. [1.]

Siis $Z \in \Delta_{i+1} \subseteq \Delta$

(i-iv) $\Rightarrow \Delta$ on maksimaalisesti Σ -konsistentti joukon $\mathbf{A}$ laajennus.



4. Kaikille maksimaalisesti Σ -konsistenteille joukoille Γ , (i) $\Sigma \subseteq \Gamma$ ja (ii) joko $Z \in \Gamma$ tai $\neg Z \in \Gamma$ kaikille lauseille Z .

(i) Oletetaan $Z \in \Sigma - \Gamma$. Tällöin $\Gamma \cup \{Z\}$ on Σ -epäkonsistentti.

Siis on olemassa $\{A_1, \dots, A_n\} \subseteq \Gamma$, jolle $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \neg(\top \wedge A_1 \wedge \dots \wedge A_n \wedge Z)$.

Jatketaan todistusta:

1. $\neg(\top \wedge A_1 \wedge \dots \wedge A_n \wedge Z)$
2. $Z \rightarrow \neg(\top \wedge A_1 \wedge \dots \wedge A_n)$ (Prop, 1)
3. Z (GP)
4. $\neg(\top \wedge A_1 \wedge \dots \wedge A_n)$ (MP, 2, 3)

Siis $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \neg(\top \wedge A_1 \wedge \dots \wedge A_n)$.

$\Rightarrow \Gamma$ on Σ -epäkonsistentti, ristiriita ja $\Sigma \subseteq \Gamma$.



5. Konstruoidaan malli $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$.

S : kaikkien maksimaalisesti Σ -konsistenttien joukkojen luokka.

Kaikille $s, t \in S$: sRt joss $s^\# \subseteq t$.

Kaikille atomilauseille Q : $v(s, Q) = \text{true}$ joss $Q \in s$.

6. Kaikille lauseille Q , kaikille $s \in S$ pätee: $\mathcal{M}, s \models Q$ joss $Q \in s$.

Todistus rakenteellisella induktiolla:

- $\perp$:
 $\mathcal{M}, s \not\models \perp$.
Oletetaan, että $\perp \in s$. Koska $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \neg(\top \wedge \perp)$, s on Σ -epäkonsistentti, ristiriita ja $\perp \notin s$.
- $\neg Q$:
 $\mathcal{M}, s \models \neg Q$ joss $\mathcal{M}, s \not\models Q$ joss [IH] $Q \notin s$ joss [4.(ii)] $\neg Q \in s$.
...



- (ii) Koska Γ Σ -konsistentti, $\{Z, \neg Z\} \not\subseteq \Gamma$ ($\neg(\top \wedge Z \wedge \neg Z)$ tautologia). Oletetaan $Z \notin \Gamma$ ja $\neg Z \notin \Gamma$.

Siis on olemassa $\{A_1^+, \dots, A_{n+}^+\} \subseteq \Gamma$, jolle $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \neg(\top \wedge A_1^+ \wedge \dots \wedge A_{n+}^+ \wedge Z)$

sekä $\{A_1^-, \dots, A_{n-}^-\} \subseteq \Gamma$, jolle $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \neg(\top \wedge A_1^- \wedge \dots \wedge A_{n-}^- \wedge \neg Z)$.

Jatketaan johtoja:

1. $\neg(\top \wedge A_1^+ \wedge \dots \wedge A_{n+}^+ \wedge Z)$
2. $\neg(\top \wedge A_1^- \wedge \dots \wedge A_{n-}^- \wedge \neg Z)$
3. $Z \rightarrow \neg(\top \wedge A_1^+ \wedge \dots \wedge A_{n+}^+)$ (Prop, 1)
4. $\neg Z \rightarrow \neg(\top \wedge A_1^- \wedge \dots \wedge A_{n-}^-)$ (Prop, 2)
5. $\neg(\top \wedge A_1^+ \wedge \dots \wedge A_{n+}^+ \wedge A_1^- \wedge \dots \wedge A_{n-}^-)$ (Prop, 3, 4)

$\Rightarrow \Gamma$ on Σ -epäkonsistentti, ristiriita ja joko $Z \in \Gamma$ tai $\neg Z \in \Gamma$ kaikille lauseille Z .



- $\Box Q$: ($\Leftarrow$) Olkoon $\Box Q \in s$. Jos sRt , niin $s^\# \subseteq t$, $Q \in t$ ja $\mathcal{M}, t \models Q$ [IH]. Siis $\mathcal{M}, s \models \Box Q$.
($\Rightarrow$) Olkoon $\Box Q \notin s$. Tällöin $\neg \Box Q \in s$ [4.(ii)].
Nyt $t_0 = s^\# \cup \{\neg Q\}$ on Σ -konsistentti [2].
[Lindenbaum] t_0 :lla maks. Σ -konsistentti laajennus t .
Nyt sRt , koska $s^\# \subseteq t$. Koska $\neg Q \in t_0 \subseteq t$, $Q \notin t$ [4.(ii)]. Siis $\mathcal{M}, t \not\models Q$ [IH] ja $\mathcal{M}, s \not\models \Box Q$.

7. Koska $\Sigma \subseteq s$ kaikille $s \in S$ [4.(i)], Σ on pätevä mallissa $\mathcal{M}$ [6].
Koska $\{\neg P\}$ on Σ -konsistentti, on olemassa sen maksimaalisesti Σ -konsistentti laajennus $t \in S$ ja $P \notin t$. Siis $\mathcal{M}, t \not\models P$ [6].
Koska Σ on pätevä mallissa $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$ ja on olemassa $t \in S$ siten, että $\mathcal{M}, t \not\models P$, väittämä $\Sigma \models_{\mathbf{K}} P$ ei päde.

$\Rightarrow$ Annettu modaali-logiikan $\mathbf{K}$ Hilbert-tyylinen todistusteoria on täydellinen. ■

Yleinen tapaus (lokaalit premissit mukana)

Määritelmä. $\Sigma \vdash_K \Upsilon \implies P$ tarkoittaa, että on olemassa lauseeseen P päättävä lausejono, joka koostuu ensin tulevasta *globaalista osasta* ja sitä seuraavasta *lokaalista osasta*.

Gloaalissa osassa jokainen lause

- on K :n aksiooma, *kuuluu lausejoukkoon* Σ tai
- on saatu jonossa edellä olevista lauseista **Modus Ponens tai N-säännöllä**.

Lokaalissa osassa jokainen lause

- on K :n aksiooma, *kuuluu lausejoukkoon* Υ tai
- on saatu jonossa edellä olevista lauseista **Modus Ponens -säännöllä**.

Johtojen ominaisuuksia

- Johdot ovat äärellisiä.

$\Rightarrow$ **Kompaktius** ($\vdash$):

Jos $\Sigma \vdash_K \Upsilon \implies P$, niin on olemassa äärellisen joukot $\Sigma' \subseteq \Sigma$ ja $\Upsilon' \subseteq \Upsilon$, joille $\Sigma' \vdash_K \Upsilon' \implies P$.

- MP- ja N-sääntö monotonisia.

$\Rightarrow$ **Monotonisuus** ($\vdash$):

Olkoon $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2$ ja $\Upsilon_1 \subseteq \Upsilon_2$. Tällöin jos $\Sigma_1 \vdash_K \Upsilon_1 \implies P$, niin $\Sigma_2 \vdash_K \Upsilon_2 \implies P$

- **Lokaali deduktioteoreema** ($\vdash$):

$\Sigma \vdash_K \Upsilon \cup \{Q\} \implies P$ joss $\Sigma \vdash_K \Upsilon \implies Q \rightarrow P$.

Esimerkki. $\{P, P \rightarrow Q\} \vdash_K \{\Box Q \rightarrow R\} \implies R$

1. P (GP)
2. $P \rightarrow Q$ (GP)
3. Q (MP, 1, 2)
4. $\Box Q$ (N, 3)
5. $\Box Q \rightarrow R$ (LP)
6. R (MP, 4, 5)

Huom! N-sääntöä ei voi käyttää lokaalissa osassa.

Esim. $\{P, P \rightarrow Q\} \vdash_K \{\Box Q \rightarrow R\} \implies \Box R$ ei päde.

Virheettömyys ja täydellisyys

Teoreema. $\Sigma \models_K \Upsilon \implies P$ joss $\Sigma \vdash_K \Upsilon \implies P$.

Todistus. ($\Rightarrow$) [Täydellisyys].

Olkoon $\Sigma \models_K \Upsilon \implies P$.

- Kompaktius ($\models$):

On olemassa äärelliset joukot $\Sigma' \subseteq \Sigma$ ja $\Upsilon' = \{\phi_1, \dots, \phi_n\} \subseteq \Upsilon$ siten, että $\Sigma' \models_K \Upsilon' \implies P$.

- Lokaali deduktioteoreema ($\models$):

$\Sigma' \models_K \emptyset \implies \phi_1 \rightarrow (\phi_2 \rightarrow \dots \rightarrow (\phi_n \rightarrow P) \dots)$.

- Täydellisyysteoreema: $\Sigma' \vdash_K \emptyset \implies \phi_1 \rightarrow (\dots \rightarrow (\phi_n \rightarrow P) \dots)$.

- Lokaali deduktioteoreema ($\vdash$): $\Sigma' \vdash_K \Upsilon' \implies P$.

- Monotonisuus ($\vdash$): $\Sigma \vdash_K \Upsilon \implies P$.



$(\Leftarrow)$ [Virheettömyys]

Olkoon $\Sigma \vdash_K \Upsilon \Rightarrow P$.

- Kompaktius ($\vdash$):

On olemassa äärelliset joukot $\Sigma' \subseteq \Sigma$ ja $\Upsilon' = \{\phi_1, \dots, \phi_n\} \subseteq \Upsilon$ siten, että $\Sigma' \vdash_K \Upsilon' \Rightarrow P$.

- Lokaali deduktioteoreema ($\vdash$):

$\Sigma' \vdash_K \emptyset \Rightarrow \phi_1 \rightarrow (\dots \rightarrow (\phi_n \rightarrow P) \dots)$.

- Täydellisysteoreema: $\Sigma' \models_K \emptyset \Rightarrow \phi_1 \rightarrow (\dots \rightarrow (\phi_n \rightarrow P) \dots)$.

- Lokaali deduktioteoreema ($\models$): $\Sigma' \models_K \Upsilon' \Rightarrow P$.

- Monotonisuus ($\models$): $\Sigma \models_K \Upsilon \Rightarrow P$.

■



Modaalilogiikka T (II)

Näin saadaan siis Hilbert-tyylinen todistusteoria modaalilogiikalle **T**:

Klassiset aksioomat: Kaikki tautologiat.

Modaaliaksioomat: Kaikki muotoa

K: $\Box(P \rightarrow Q) \rightarrow (\Box P \rightarrow \Box Q)$

T: $\Box P \rightarrow P$

olevat lauseet.

Modus Ponens -sääntö

N-sääntö

$\Rightarrow$

Propositio. $\Sigma \models_T \Upsilon \Rightarrow P$ joss $\Sigma \vdash_T \Upsilon \Rightarrow P$.



Modaalilogiikka T

Modaalilogiikan **K** todistusteorian ja edellä käsiteltyjen kehysten ominaisuuksia karakterisoivien lauseiden avulla voidaan muodostaa suoraviivaisesti Hilbert-tyyppinen todistusteoria myös muille kehyslogiikoille.

Tarkastellaan ensimmäisenä esimerkkinä modaalilogiikkaa **T**, jonka kehykset ovat refleksiivisiä.

Modaalilogiikan **T** karakteristinen lause

T: $\Box P \rightarrow P$

Propositio. $\Sigma \models_T \Upsilon \Rightarrow P$ joss $\Sigma \cup \{T\} \models_K \Upsilon \Rightarrow P$.

$\Rightarrow$ (**K**:n virheettömyys- ja täydellisysteoreema)

Propositio. $\Sigma \models_T \Upsilon \Rightarrow P$ joss $\Sigma \cup \{T\} \vdash_K \Upsilon \Rightarrow P$.



Modaalilogiikka S5

Vastaavasti kehyslogiikalle **S5** (ekivalenttisten kehysten joukko):

Propositio. $\Sigma \models_{S5} \Upsilon \Rightarrow P$ joss $\Sigma \cup \{T\} \cup \{4\} \cup \{B\} \vdash_K \Upsilon \Rightarrow P$ joss $\Sigma \cup \{T\} \cup \{4\} \cup \{5\} \vdash_K \Upsilon \Rightarrow P$ joss $\Sigma \cup \{T\} \cup \{5\} \vdash_K \Upsilon \Rightarrow P$.

Hilbert-tyylinen todistusteoria modaalilogiikalle **S5**:

Modaaliaksioomat: Kaikki muotoa

K: $\Box(P \rightarrow Q) \rightarrow (\Box P \rightarrow \Box Q)$

T: $\Box P \rightarrow P$

4: $\Box P \rightarrow \Box \Box P$

5: $\neg \Box P \rightarrow \Box \neg \Box P$

olevat lauseet.

Propositio. $\Sigma \models_{S5} \Upsilon \Rightarrow P$ joss $\Sigma \vdash_{S5} \Upsilon \Rightarrow P$.



Modaalilogiikka KD45

KD45 on sarjallisten, transitiivisten ja euklidisten kehysten joukko.

Propositio. $\Sigma \models_{\mathbf{KD45}} \Upsilon \implies P$ joss $\Sigma \cup \llbracket \mathbf{D} \rrbracket \cup \llbracket \mathbf{4} \rrbracket \cup \llbracket \mathbf{5} \rrbracket \vdash_{\mathbf{K}} \Upsilon \implies P$.

Hilbert-tyylinen todistusteoria modaalilogiikalle **KD45**:

Modaaliaksioomat: Kaikki muotoa

$$\mathbf{K}: \Box(P \rightarrow Q) \rightarrow (\Box P \rightarrow \Box Q)$$

$$\mathbf{D}: \Box P \rightarrow \Diamond P$$

$$\mathbf{4}: \Box P \rightarrow \Box \Box P$$

$$\mathbf{5}: \neg \Box P \rightarrow \Box \neg \Box P$$

olevat lauseet.

Propositio. $\Sigma \models_{\mathbf{KD45}} \Upsilon \implies P$ joss $\Sigma \vdash_{\mathbf{KD45}} \Upsilon \implies P$.