Esimerkkimodaalilogiikkoja

- Käsitellään esimerkkeinä kehyslogiikkoja
- Valitaan joukko $\mathbf{L}$ kehyksiä $\langle S, R\rangle$
(tyypillisesti antamalla relaatiolle R jokin ominaisuus; esim. refleksiivisten kehysten joukko sisältää kaikki kehykset $\langle S, R\rangle$, joissa R refleksiivinen).
- $\mathbf{L}$-pätevien lauseiden joukko:
  1. sisältää kaikki tautologiat;
  2. sisältää lauseen Q aina, kun siihen kuuluvat P ja $P \to Q$;
  3. on suljettu sijoituksen suhteen;
  4. sisältää muotoa $\Box(P \to Q) \to (\Box P \to \Box Q)$ olevat lauseet;
  5. sisältää lauseen $\Box P$ aina, kun siihen kuuluu P.

  $\boxed{\Rightarrow}$ $\mathbf{L}$-pätevien lauseiden joukko on normaali propositionaalinen modaalilogiikka (modaalilogiikka $\mathbf{L}$).

Sijoitusesiintymät

Määritelmä. Jos Σ on joukko lauseita, $[\![\Sigma]\!]$ on joukkoon Σ kuuluvien lauseiden kaikkien sijoitusesiintymien joukko.

- Esim. Jos $\Sigma = \{P \to P\}$, $[\![\Sigma]\!]$ sisältää mm. lauseet
$P \to P$
$\neg P \to \neg P$
$\Box\Box Q \to \Box\Box Q$
$(\Box(P \to Q) \to (\Box P \to \Box Q)) \to (\Box(P \to Q) \to (\Box P \to \Box Q))$
- Jatkossa annetaan tietyille lauseille nimiä.
Esim. I: $P \to P$
- Ko. lauseen sijoitusesiintymien joukkoa merkitään $[\![\mathrm{I}]\!]$ ja tällä tarkoitetaan siis joukkoa $[\![\{P \to P\}]\!]$.

Modaalilogiikka K

- Olkoon $\mathbf{K}$ kaikkien kehysten joukko.
- $\mathbf{K}$ heikoin normaali modaalilogiikka: jos lause on $\mathbf{K}$-pätevä, se on $\mathbf{L}$-pätevä, jokaisella normaalilla modaalilogiikalla $\mathbf{L}$.
- Karakteristinen lause K: $\Box(P \to Q) \to (\Box P \to \Box Q)$
- Jokainen joukon $[\![\mathrm{K}]\!]$ lause on $\mathbf{K}$-pätevä [Mahdollisten maailmojen semantiikan perusteoreema, kohta 2]

Modaalilogiikka T

- $\mathbf{T}$: refleksiivisten kehysten joukko.
(Kehys $\langle S, R\rangle$ on refleksiivinen, jos $\forall x(xRx)$ tosi kehyksessä).
- Esimerkiksi jos $\Box$ tarkoittaa tietämistä, kehysten refleksiivisyys on luontevaa: jos agentti tietää, että P, P on totta.
  - Olkoon $\langle S, R, v\rangle, s \Vdash \Box P$.
  - Jotta myös $\langle S, R, v\rangle, s \Vdash P$, riittää, että R on refleksiivinen:

    Jos $\langle S, R, v\rangle, s \Vdash \Box P$,

    kaikilla $t \in S$, joille sRt, $\langle S, R, v\rangle, t \Vdash P$.

    Kun R refleksiivinen, sRs ja $\langle S, R, v\rangle, s \Vdash P$.

Modaalilogiikka $\mathbf{T}$

Modaalilogiikan $\mathbf{T}$ karakteristinen lause
T: $\Box P \rightarrow P$
on pätevä kehyksessä joss kehys on refleksiivinen.

$\boxed{\Rightarrow}$ $\mathbf{T} = \mathbf{K} + [\![\mathrm{T}]\!]$

Propositio. $\Sigma \models_{\mathbf{T}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss $\Sigma \cup [\![\mathrm{T}]\!] \models_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

Todistus. ($\Leftarrow$) Olkoon $\Sigma \cup [\![\mathrm{T}]\!] \models_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

Koska $\mathbf{T} \subseteq \mathbf{K}$, $\Sigma \cup [\![\mathrm{T}]\!] \models_{\mathbf{T}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

Lauseet $[\![\mathrm{T}]\!]$ ovat $\mathbf{T}$-päteviä (ks. ed. luento).

Siis $\Sigma \models_{\mathbf{T}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

(Todistus jatkuu.)
($\Rightarrow$) Oletetaan, että $\Sigma \cup [\![\mathrm{T}]\!] \models_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$ ei päde.

On olemassa malli $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$ siten, että lauseet $\Sigma \cup [\![\mathrm{T}]\!]$ ovat päteviä tässä mallissa ja mallissa on maailma s, jossa $\langle S, R, v \rangle, s \mid\!\vdash \Upsilon \cup \{\neg P\}$.

Olkoon $R^* = R \cup \{\langle s, s \rangle, s \in S\}$. Osoitetaan, että jokaiselle lauseelle Q ja maailmalle $s \in S$: $\langle S, R, v \rangle, s \mid\!\vdash Q$ joss $\langle S, R^*, v \rangle, s \mid\!\vdash Q$ induktiolla lauseen Q rakenteen suhteen:

- Lause on atomilause Q:
  $\langle S, R, v \rangle, s \mid\!\vdash Q$ joss $\langle S, R^*, v \rangle, s \mid\!\vdash Q$.
- Lause on muotoa $\neg Q$:
  $\langle S, R, v \rangle, s \mid\!\vdash \neg Q$ joss $\langle S, R, v \rangle, s \not\mid\!\vdash Q$ joss (induktio-oletuksella)
  $\langle S, R^*, v \rangle, s \not\mid\!\vdash Q$ joss $\langle S, R^*, v \rangle, s \mid\!\vdash \neg Q$
  ...

(Todistus jatkuu.)

- Lause on muotoa $\Box Q$:
  ($\Leftarrow$) Jos $\langle S, R, v \rangle, s \not\mid\!\vdash \Box Q$, on olemassa t, jolle sRt ja
  $\langle S, R, v \rangle, t \not\mid\!\vdash Q$. Induktio-oletuksella $\langle S, R^*, v \rangle, t \not\mid\!\vdash Q$.
  Nyt sR^*t ja $\langle S, R^*, v \rangle, s \not\mid\!\vdash \Box Q$.
  ($\Rightarrow$) Jos $\langle S, R^*, v \rangle, s \not\mid\!\vdash \Box Q$, on olemassa t, jolle sR^*t ja
  $\langle S, R^*, v \rangle, t \not\mid\!\vdash Q$.
  1. Jos $t \neq s$, sRt ja $\langle S, R, v \rangle, s \not\mid\!\vdash \Box Q$.
  2. Jos $t = s$, $\langle S, R, v \rangle, s \not\mid\!\vdash Q$.
     Koska $\Box Q \rightarrow Q$ on pätevä mallissa $\langle S, R, v \rangle$, $\langle S, R, v \rangle, s \not\mid\!\vdash \Box Q$.

Siis $\langle S, R^*, v \rangle \models \Sigma \cup [\![\mathrm{T}]\!]$ ja $\langle S, R^*, v \rangle, s \mid\!\vdash \Upsilon \cup \{\neg P\}$.
$\boxed{\Rightarrow}$ Koska $\langle S, R^* \rangle$ on refleksiivinen kehys, myöskään $\Sigma \models_{\mathbf{T}} \Upsilon \Longrightarrow P$ ei päde. ■

Kehyksen ominaisuuksia

Kehyksen ominaisuuksia ja vastaavia modaalilogiikan lauseita:

1. Refleksiivisyys:
   $\forall s(sRs)$ $\quad\quad$ $\Box A \rightarrow A$
2. Symmetrisyys:
   $\forall s \forall t(sRt \rightarrow tRs)$ $\quad\quad$ $A \rightarrow \Box\Diamond A$
3. Sarjallisuus:
   $\forall s \exists t(sRt)$ $\quad\quad$ $\Box A \rightarrow \Diamond A$
4. Transitiivisuus:
   $\forall s \forall t \forall u(sRt \wedge tRu \rightarrow sRu)$ $\quad\quad$ $\Box A \rightarrow \Box\Box A$
5. Euklidisuus:
   $\forall s \forall t \forall u(sRt \wedge sRu \rightarrow tRu)$ $\quad\quad$ $\neg\Box A \rightarrow \Box\neg\Box A$

Kehyksen ominaisuuksia

6. Osittain funktionaalinen:	
$\forall s \forall t \forall u (sRt \wedge sRu \rightarrow t = u)$	$\Diamond A \rightarrow \Box A$
7. Funktionaalinen:	
$\forall s \exists ! t (sRt)$	$\Diamond A \leftrightarrow \Box A$
8. Heikosti tiheä:	
$\forall s \forall t (sRt \rightarrow \exists u (sRu \wedge uRt))$	$\Box\Box A \rightarrow \Box A$
9. Heikosti kytketty:	
$\forall s \forall t \forall u (sRt \wedge sRu \rightarrow$	$\Box (A \wedge \Box A \rightarrow B) \vee$
$tRu \vee t = u \vee uRt)$	$\Box (B \wedge \Box B \rightarrow A)$
10. Heikosti suunnattu:	
$\forall s \forall t \forall u (sRt \wedge sRu \rightarrow \exists v (tRv \wedge uRv))$	$\Diamond\Box A \rightarrow \Box\Diamond A$

Kehyksen ominaisuudet ja modaalilauseet (I)

Teoreema. Olkoon $\mathcal{F} = \langle S, R \rangle$ jokin kehys. Tällöin kullekin ominaisuuksista 1–10, jos R täyttää ominaisuuden, niin vastaavan lauseen kaikki sijoitusesiintymät ovat päteviä $\mathcal{F}$:ssä.

Todistus. 2. Olkoon R symmetrinen. Osoitetaan, että
$\langle S, R \rangle \models [\![A \rightarrow \Box\Diamond A]\!]$.
Vastaoletus: löytyy sijoitusesiintymä $A \rightarrow \Box\Diamond A$, jolle
$\langle S, R \rangle \not\models A \rightarrow \Box\Diamond A$.
Tällöin löytyy malli $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$ ja maailma $s \in S$, jossa $\mathcal{M}, s \Vdash A$ ja $\mathcal{M}, s \nVdash \Box\Diamond A$. Siis on olemassa t, jolle sRt ja $\mathcal{M}, t \nVdash \Diamond A$. Täten kaikilla t', tRt', $\mathcal{M}, t' \nVdash A$. Koska R:n symmetrinen, tRs ja $\mathcal{M}, s \nVdash A$, ristiriita. Siis vastaoletus ei päde ja $\langle S, R \rangle \models [\![A \rightarrow \Box\Diamond A]\!]$ pätee.
Loput kohdat samaan tapaan. ■

Kehyksen ominaisuudet ja modaalilauseet (II)

Teoreema. Kun kehyksessä $\mathcal{F} = \langle S, R \rangle$ jonkin lauseista 1–10 kaikki sijoitusesiintymät ovat päteviä, niin R täyttää vastaavan ominaisuuden.

Todistus. 6. Ositt. funkt. ($\forall s \forall t \forall u (sRt \wedge sRu \rightarrow t = u)$) vs. $\Diamond A \rightarrow \Box A$:

Olkoon $\langle S, R \rangle \models [\![\Diamond A \rightarrow \Box A]\!]$.
Vastaoletus: R ei ole osittain funktionaalinen. Tällöin on olemassa $s, t, u \in S$ siten, että sRt, sRu, mutta $t \neq u$.
Valitaan valuaatio v, jossa atomilauseelle P: $v(t, P) = \mathrm{true}$ ja $v(u, P) = \mathrm{false}$. Nyt $\langle S, R, v \rangle, s \Vdash \Diamond P$ ja $\langle S, R, v \rangle, s \nVdash \Box P$. Siis $\langle S, R \rangle \not\models \Diamond P \rightarrow \Box P$.
Siis kaikki lauseen $\Diamond A \rightarrow \Box A$ sijoitusesiintymät eivät ole päteviä kehyksessä $\langle S, R \rangle$. Tämä on ristiriidassa alkuoletukseen, joten vastaoletus ei päde ja R on ositt. funktionaalinen.
Loput kohdat samaan tapaan. ■

Modaalilogiikka K4

K4 on transitiivisten kehysten joukko.

Karakteristinen lause

$4 : \Box P \rightarrow \Box\Box P$ (positiivinen itsetutkiskelu)

Propositio. $\Sigma \models_{\mathbf{K4}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss $\Sigma \cup [\![4]\!] \models_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

Modaalilogiikka S4

S4 on transitiivisten ja refleksiivisten kehysten joukko.

Propositio. $\Sigma \models_{\mathbf{S4}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss $\Sigma \cup [\![4]\!] \cup [\![\mathrm{T}]\!] \models_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

Modaalilogiikka $\mathbf{KB}$

$\mathbf{KB}$ on symmetristen kehysten joukko.

Karakteristinen lause

$\mathrm{B} : P \rightarrow \Box\Diamond P$

Propositio. $\Sigma \models_{\mathbf{KB}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss $\Sigma \cup [\![\mathrm{B}]\!] \models_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

Modaalilogiikka $\mathbf{B}$

$\mathbf{B}$ on symmetristen ja refleksiivisten kehysten joukko.

Propositio. $\Sigma \models_{\mathbf{B}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss $\Sigma \cup [\![\mathrm{B}]\!] \cup [\![\mathrm{T}]\!] \models_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

$\boxed{\Rightarrow}$ $\mathbf{KBT}$

Modaalilogiikka $\mathbf{S5}$

$\mathbf{S5}$ on ekvivalenttisten (symmetristen, refleksiivisten ja transitiivisten) kehysten joukko.

Karakteristinen lause

$5 : \neg\Box P \rightarrow \Box\neg\Box P$ (Negatiivinen itsetutkiskelu)

Propositio.
$\Sigma \models_{\mathbf{S5}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss
$\Sigma \cup [\![\mathrm{T}]\!] \cup [\![4]\!] \cup [\![\mathrm{B}]\!] \models_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss
$\Sigma \cup [\![\mathrm{T}]\!] \cup [\![4]\!] \cup [\![5]\!] \models_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss
$\Sigma \cup [\![\mathrm{T}]\!] \cup [\![5]\!] \models_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

Välttämättömyyden ja ideaalisen tietämisen logiikka.

Sarjallisia modaalilogiikkoja

Modaalilogiikka $\mathbf{D}$

$\mathbf{D}$ on sarjallisten kehysten joukko.

Karakteristinen lause
$\mathrm{D} : \Box P \rightarrow \Diamond P$

$\Sigma \models_{\mathbf{D}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss $\Sigma \cup [\![\mathrm{D}]\!] \models_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

Modaalilogiikka $\mathbf{D4}$

$\mathbf{D4}$ on sarjallisten ja transitiivisten kehysten joukko.

$\Sigma \models_{\mathbf{D4}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss $\Sigma \cup [\![\mathrm{D}]\!] \cup [\![4]\!] \models_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

Modaalilogiikka $\mathbf{DB}$

$\mathbf{DB}$ on sarjallisten ja symmetristen kehysten joukko.

$\Sigma \models_{\mathbf{DB}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss $\Sigma \cup [\![\mathrm{D}]\!] \cup [\![\mathrm{B}]\!] \models_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

Uskomisen logiikka

Se mitä uskotaan ei ole välttämättä totta.

$\boxed{\Rightarrow}$ Kehykset eivät ole välttämättä refleksiivisiä.

Otetaan positiivinen ja negatiivinen itsetutkiskelu.

$\boxed{\Rightarrow}$ Modaalilogiikka $\mathbf{K45}$.

Mutta $\neg\Box\bot$ ei ole $\mathbf{K45}$-pätevä. $(\langle\{s\}, \emptyset, v\rangle, s \not\Vdash \Box\bot)$

Vaaditaan lisäksi sarjallisuus.
$\boxed{\Rightarrow}$ Modaalilogiikka $\mathbf{KD45}$
(sarjalliset, transitiiviset ja euklidiset kehykset).
HUOM! Transitiivisuus ei ole redundanttia: $\Box P \rightarrow \Box\Box P$ ei ole pätevä sarjallisten ja euklidisten kehysten joukossa ($\mathbf{KD5}$-pätevä).

Uskomisen logiikka

- $\neg\Box\bot$ on $\mathbf{KD45}$-pätevä.
- $\Box P \to P$ ei ole $\mathbf{KD45}$-pätevä.
- $\Box(\Box P \to P)$ on $\mathbf{KD45}$-pätevä.

  Olkoon $\langle S, R\rangle$ $\mathbf{KD45}$-kehys.

  Olkoon $s \in S$ ja sRt.

  Euklidisuus: tRt (sRt ja sRt).

  Joten kaikilla t, joilla sRt, tRt.

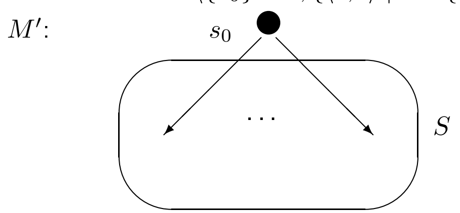
  Nyt $\langle S, R, v\rangle, s \Vdash \Box(\Box P \to P)$,
  koska kaikilla t, joilla sRt,
  $\langle S, R, v\rangle, t \Vdash \Box P \to P$.

Yksinkertaisempi kehysluokka: $\mathrm{S5}$ ja $\mathrm{KD45}$

Modaalilogiikan $\mathbf{S5}$ kehyksiksi riittävät *universaalikehykset*, so. kehykset $\langle S, R\rangle$, joissa $R = \{\langle s, t\rangle \mid s, t \in S\}$.

Propositio. Jos lause P on tosi $\mathbf{S5}$-kehykseen perustuvassa mallissa, P on tosi myös universaalikehykseen perustuvassa mallissa.

Propositio. Jos lause P on tosi $\mathbf{KD45}$-kehykseen perustuvassa mallissa, P on tosi mallissa muotoa $M' = \langle\{s_0\} \cup S, \{\langle s, t\rangle \mid s \in \{s_0\} \cup S, t \in S\}, v\rangle$.



Deduktioteoreema ja kompaktius

- Kaikilla edellä mainituilla logiikoilla globaali deduktioteoreema pätee:

  $\Sigma \cup \{Q\} \models_{\mathbf{L}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss
  jollekin n $\Sigma \models_{\mathbf{L}} \Upsilon \cup \{\Box^0 Q, \Box^1 Q, \ldots, \Box^n Q\} \Longrightarrow P$.
- Logiikat ovat kompakteja:

  Jos $\Sigma \models_{\mathbf{L}} \Upsilon \Longrightarrow P$, niin on olemassa äärelliset joukot $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ ja $\Upsilon_0 \subseteq \Upsilon$ siten, että $\Sigma_0 \models_{\mathbf{L}} \Upsilon_0 \Longrightarrow P$.
- Näin ei ole kuitenkaan kaikilla modaalilogiikoilla eikä edes kehyslogiikoilla.

Modaalilogiikka GL

$\mathbf{GL}$ on transitiivisten, irrefleksiivisten ja äärellisten kehysten joukko (tai transitiivisten kehysten joukko, joissa ei ole ääretöntä ketjua saavutettavia maailmoja).

Tämä ei vastaa mitään (ensimmäisen kertaluvun) predikaattilogiikan lauseella ilmaistavaa kehysten ominaisuutta.

Karakteristinen lause

$\mathrm{GL} : \Box(\Box P \to P) \to \Box P$

Globaali deduktioteoreema ei päde eikä $\mathbf{GL}$ ole kompakti.

Jos Σ ja Υ ovat äärellisiä lausejoukkoja, $\Sigma \models_{\mathbf{GL}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss $\Sigma \cup [\![\mathrm{GL}]\!] \models_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$.