Modaalilogiikan perusteet

Aluksi käsitellään modaalilogiikoita, joissa on modaalioperaattori $\Box$ ja sen duaalioperaattori $\Diamond$ $(\neg\Box\neg)$.

Modaalioperaattorit voidaan luonnolliselle kielelle tulkita monella eri tavalla:

$\Box P$	$\Diamond P$
välttämättä P	mahdollisesti P
aina tulevaisuudessa P	
aina menneisyydessä P	
pitäisi olla P	
tiedetään että P	
uskotaan että P	

Modaalilogiikan syntaksi

Olkoon annettuna atomilauseiden joukko $\Phi = \{p_1, p_2, \ldots\}$.

Propositionaaliset modaalilauseet:

1. Atomilauseet ovat *lauseita*.
2. $\top$ ja $\bot$ ovat *lauseita*.
3. Jos P ja Q ovat lauseita, niin myös $\neg P$, $(P \rightarrow Q)$, $\Box P$ ovat *lauseita*.
4. Muita *lauseita* ei ole.

Huom! Lyhennysmerkinnät:

$\Diamond P \equiv_{\text{def}} \neg\Box\neg P$ $\quad$ $P \vee Q \equiv_{\text{def}} \neg P \rightarrow Q$

$P \wedge Q \equiv_{\text{def}} \neg(P \rightarrow \neg Q)$ $\quad$ $P \leftrightarrow Q \equiv_{\text{def}} \neg((P \rightarrow Q) \rightarrow \neg(Q \rightarrow P))$

Tautologiat

Jos lause Q saadaan lauseesta P korvaamalla P:n atomilauseet uusilla lauseilla järjestelmällisesti, sanotaan, että Q saadaan P:stä *sijoittamalla*.

Lauseita, jotka saadaan sijoittamalla lauselogiikan pätevistä lauseista (tautologioista), sanotaan *klassisiksi tautologioiksi*.

Esim. Lause

$$(\Box\Box P \rightarrow (R \rightarrow \Box S)) \rightarrow (\Box\Box P \rightarrow (R \rightarrow \Box S))$$

on klassinen tautologia, joka on saatu lauselogiikan tautologiasta $P \rightarrow P$ korvaamalla P lauseella $(\Box\Box P \rightarrow (R \rightarrow \Box S))$

Tautologiat

☞ Klassiset tautologiat voidaan tunnistaa esim. lauselogiikan taulumenetelmällä:
Rakennetaan taulu lauseen negaatiolle pitämällä modaalioperaattorilla alkavia lauseita atomisina (niihin ei sovelleta taulusääntöjä). Jos taulu sulkeutuu, kyseessä on klassinen tautologia.

Esimerkki. Osoitetaan, että $(\Box\neg\Box(P \rightarrow Q) \wedge \Box(\neg P \wedge \neg Q)) \rightarrow (\Box\neg\Box(P \rightarrow Q) \vee \Box(\neg P \wedge \neg Q))$ on klassinen tautologia.

1.	$\neg((\Box\neg\Box(P \rightarrow Q) \wedge \Box(\neg P \wedge \neg Q)) \rightarrow (\Box\neg\Box(P \rightarrow Q) \vee \Box(\neg P \wedge \neg Q)))$	
2.	$\Box\neg\Box(P \rightarrow Q) \wedge \Box(\neg P \wedge \neg Q)$	(1)
3.	$\neg(\Box\neg\Box(P \rightarrow Q) \vee \Box(\neg P \wedge \neg Q))$	(1)
4.	$\Box\neg\Box(P \rightarrow Q)$	(2)
5.	$\Box(\neg P \wedge \neg Q)$	(2)
6.	$\neg\Box\neg\Box(P \rightarrow Q)$	(3)
	$\times$	

Logiikka = (pätevien) lauseiden joukko

Määritelmä. *Propositionaalinen modaalilogiikka $\mathcal{L}$* on joukko propositionaalisia modaalilauseita siten, että

1. kaikki (klassiset) tautologiat kuuluvat joukkoon $\mathcal{L}$;
2. $\mathcal{L}$ on suljettu modus ponensin suhteen
   (jos $P \in \mathcal{L}$ ja $P \to Q \in \mathcal{L}$, niin $Q \in \mathcal{L}$) ;
3. $\mathcal{L}$ on suljettu sijoituksen suhteen
   ($P \in \mathcal{L}$ ja Q saadaan sijoittamalla lauseesta P, niin $Q \in \mathcal{L}$).

Esim.

(1) Klassiset tautologiat ovat modaalilogiikka.

(2) Kaikkien propositionaalisten modaalilauseiden joukko on modaalilogiikka.

Mahdollisten maailmojen semantiikka

(a.k.a. Kripke-semantiikka)

Määritelmä. *Kehys* on pari $\mathcal{F} = \langle S, R \rangle$, missä S on ei-tyhjä joukko ja R on relaatio $R \subseteq S \times S$.

Joukon S alkiot ovat *mahdollisia maailmoja* ja R on maailmojen välinen saavutettavuusrelaatio: jos $s_1 R s_2$, niin s_2 on saavutettavissa s_1:stä.

Määritelmä. *Valuaatio* kehyksessä $\langle S, R \rangle$ on funktio v, joka kuvaa mahdolliset maailmat ja atomilauseet totuusarvoille (kaikille $s \in S$ ja atomilauseille P, $v(s, P)$ on joko true tai false).

(Toinen tapa: $v : S \mapsto 2^{\Phi}$; $v(s)$ on tilassa s tosien atomilauseiden joukko).

Määritelmä. *Malli* on kolmikko $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$, missä $\langle S, R \rangle$ on kehys ja v valuaatio tässä kehyksessä. $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$ *perustuu kehykseen* $\langle S, R \rangle$.

Toteutuvuusrelaatio

Relaatio $\mathcal{M}, s \Vdash P$, joka kertoo onko lause P tosi mallin $\mathcal{M}$ maailmassa s, määritellään seuraavasti.

Määritelmä. Olkoon $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$ malli.

1. $\mathcal{M}, s \Vdash P$ joss $v(s, P) = \mathrm{true}$, kun P on atomilause.
2. $\mathcal{M}, s \nVdash \bot$ ja $\mathcal{M}, s \Vdash \top$.
3. $\mathcal{M}, s \Vdash \neg P$ joss $\mathcal{M}, s \nVdash P$.
4. $\mathcal{M}, s \Vdash P \to Q$ joss $\mathcal{M}, s \nVdash P$ tai $\mathcal{M}, s \Vdash Q$.
5. $\mathcal{M}, s \Vdash \Box P$ joss $\mathcal{M}, t \Vdash P$ kaikille $t \in S$ joille sRt.

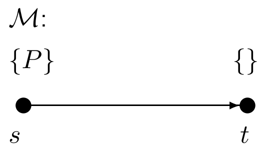
Huom! $\mathcal{M}, s \Vdash \Diamond P$ joss $\mathcal{M}, t \Vdash P$ jollekin $t \in S$ jolle sRt.

Toinen paljon käytetty merkintätapa: $\mathcal{M}, s \models P$

Toteutuvuusrelaatio

Esimerkki. Olkoon $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$ missä

$S = \{s, t\}$
$R = \{\langle s, t \rangle\}$
$v(s, P) = \mathrm{true}$, $v(t, P) = \mathrm{false}$
(tai $v(s) = \{P\}$, $v(t) = \{\}$)



- $\mathcal{M}, s \nVdash \Box P$.
- $\mathcal{M}, t \Vdash \Box P$.
- $\mathcal{M}, s \Vdash \Diamond \neg P$.
- $\mathcal{M}, s \Vdash \Box P \to P$.
- $\mathcal{M}, t \nVdash \Box P \to P$.

Pätevyys

Määritelmä.

- Lause P on *tosi* mallin $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$ maailmassa s joss $\mathcal{M}, s \Vdash P$.
- Lause P on *pätevä mallissa* $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$, joss P on tosi mallin jokaisessa maailmassa. ($\mathcal{M} \models P$)
- Lause P on *pätevä mallien joukossa* $\mathbf{C}$, joss P on pätevä jokaisessa $\mathbf{C}$:n mallissa. ($\mathbf{C} \models P$)
- Lause P on *pätevä kehysten joukossa* $\mathbf{F}$, joss P on pätevä $\mathbf{F}$:n kehyksiin perustuvien mallien joukossa. ($\mathbf{F} \models P$)

☞ Jos P on pätevä mallien/kehysten joukossa $\mathbf{C}$, sanotaan, että P on $\mathbf{C}$-pätevä.

☞ Lausejoukon Σ pätevyys mallien/kehysten joukossa $\mathbf{C}$ ($\mathbf{C} \models \Sigma$) tarkoittaa, että jokainen joukon Σ lause on pätevä ko. joukossa $\mathbf{C}$.

Pätevyys

Esimerkki. Olkoon $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$ missä $S = \{s, t\}$, $R = \{\langle s, t \rangle\}$ ja $v(s, P) = \text{true}$, $v(t, P) = \text{false}$.

- $\Box P \rightarrow P$ ei ole pätevä $\mathcal{M}$:ssä.
  $\mathcal{M}, t \nVdash \Box P \rightarrow P$.
- $P \vee \Box P$ on pätevä $\mathcal{M}$:ssä.
- $\Box\Box P$ on $\mathbf{F}$-pätevä, missä $\mathbf{F} = \{\langle S, R \rangle\}$.

Semantiikan perusominaisuudet

Teoreema. (Mahdollisten maailmojen semantiikan perusteoreema) Jos $\mathbf{C}$ on joukko malleja, $\mathbf{C}$-pätevien lauseiden joukko

1. sisältää kaikki tautologiat;
2. sisältää kaikki muotoa $\Box(P \rightarrow Q) \rightarrow (\Box P \rightarrow \Box Q)$ olevat lauseet;
3. sisältää lauseen Q aina, kun siihen kuuluvat P ja $P \rightarrow Q$;
4. sisältää lauseen $\Box P$ aina, kun siihen kuuluu P;

ja jos $\mathbf{F}$ on joukko kehyksiä, $\mathbf{F}$-pätevien lauseiden joukko on suljettu sijoituksen suhteen.

Semantiikan perusominaisuudet

Todistus. (1.) Mielivaltainen tautologia on tosi jokaisen mallin jokaisessa tilassa, joten se sisältyy $\mathbf{C}$-pätevien lauseiden joukkoon.

(2.) Olkoon $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$ mielivaltainen joukon $\mathbf{C}$ malli ja s joukon S tila. Tehdään vastaoletus, että jokin muotoa $\Box(P \rightarrow Q) \rightarrow (\Box P \rightarrow \Box Q)$ oleva lause ei ole tosi tilassa s. Tällöin (i) $\mathcal{M}, s \Vdash \Box(P \rightarrow Q)$, (ii) $\mathcal{M}, s \Vdash \Box P$ mutta (iii) $\mathcal{M}, s \nVdash \Box Q$.

Tällöin on olemassa $t \in S$, jolle sRt ja $\mathcal{M}, t \nVdash Q$ (iii). Mutta nyt $\mathcal{M}, t \Vdash P \rightarrow Q$ ja $\mathcal{M}, t \Vdash P$ (i & ii), jolloin $\mathcal{M}, t \Vdash Q$, ristiriita. Näin ollen vastaoletus on väärä ja siis jokainen muotoa $\Box(P \rightarrow Q) \rightarrow (\Box P \rightarrow \Box Q)$ tosi s. Täten jokainen ko. muotoa oleva lause on $\mathbf{C}$-pätevä.

(Todistus jatkuu.)

(3.) Olkoon P ja $P \to Q$ $\mathbf{C}$-päteviä. Olkoon $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$ mielivaltainen joukon $\mathbf{C}$ malli ja s joukon S tila. Tällöin P ja $P \to Q$ ovat tosia tilassa s, jolloin Q on tosi tilassa s. Siis Q on tosi jokaisen joukkoon $\mathbf{C}$ kuuluvan mallin jokaisessa tilassa, joten Q on $\mathbf{C}$-pätevä.

(4.) Olkoon P $\mathbf{C}$-pätevä ja olkoon $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$ mielivaltainen joukon $\mathbf{C}$ malli ja s joukon S tila. Tällöin kaikilla $t \in S$, joille sRt, $\mathcal{M}, t \Vdash P$ ja $\mathcal{M}, s \Vdash \Box P$. Täten $\Box P$ on $\mathbf{C}$-pätevä.

Osoitetaan vielä, että jos $\mathbf{F}$ on joukko kehyksiä, $\mathbf{F}$-pätevien lauseiden joukko on suljettu sijoituksen suhteen, t.s.

jos lause X on $\mathbf{F}$-pätevä, niin lause $\sigma(X)$ on $\mathbf{F}$-pätevä, missä $\sigma(X)$ saadaan lauseesta X sijoituksella σ, jossa lauseen X kukin atomilause P, korvataan lauseella $\sigma(P)$ (huom. myös $\sigma(P) = P$ mahdollinen).

(Todistus jatkuu.)

Oletetaan, että $\sigma(X)$ ei ole $\mathbf{F}$-pätevä ja osoitetaan, että tällöin X ei ole $\mathbf{F}$-pätevä.

Jos $\sigma(X)$ ei ole $\mathbf{F}$-pätevä, on olemassa $\langle S, R\rangle \in \mathbf{F}$, v ja $t \in S$ s.e. $\mathcal{M}, t \not\Vdash \sigma(X)$, missä $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$.

Olkoon $\mathcal{M}' = \langle S, R, v'\rangle$, missä $v'(P, s) = \text{true}$ joss $\mathcal{M}, s \Vdash \sigma(P)$.

Osoitetaan kaikilla lauseille Z rakenteisella induktiolla, että kaikille tiloille $s \in S$ pätee: $\mathcal{M}', s \Vdash Z$ joss $\mathcal{M}, s \Vdash \sigma(Z)$.

- Jos Z on atomilause, tällöin $\mathcal{M}', s \Vdash Z$ joss $v'(Z, s) = \text{true}$ joss $\mathcal{M}, s \Vdash \sigma(Z)$.
- Jos Z on muotoa $\top$ tai $\bot$, $\mathcal{M}', s \Vdash Z$ joss $\mathcal{M}, s \Vdash \sigma(Z)$.

(Todistus jatkuu.)

- Jos Z on muotoa $\neg Z'$, niin $\mathcal{M}', s \Vdash \neg Z'$ joss $\mathcal{M}', s \not\Vdash Z'$. Induktio-oletuksen perusteella tämä pätee täsmälleen, kun $\mathcal{M}, s \not\Vdash \sigma(Z')$, joka pätee joss $\mathcal{M}, s \Vdash \neg\sigma(Z')[= \sigma(\neg Z')]$.
- Jos Z on muotoa $Z' \to Z''$, niin $\mathcal{M}', s \Vdash Z' \to Z''$ joss $\mathcal{M}', s \not\Vdash Z'$ tai $\mathcal{M}', s \Vdash Z''$ joss $\mathcal{M}, s \not\Vdash \sigma(Z')$ tai $\mathcal{M}, s \Vdash \sigma(Z'')$ [IH] joss $\mathcal{M}, s \Vdash \sigma(Z') \to \sigma(Z'')[= \sigma(Z' \to Z'')]$.
- Jos Z on muotoa $\Box Z'$, niin $\mathcal{M}', s \Vdash \Box Z'$ joss kaikille $t \in S$, joille sRt, pätee $\mathcal{M}', t \Vdash Z'$ joss kaikille $t \in S$, joille sRt, pätee $\mathcal{M}, t \Vdash \sigma(Z')$ [IH] joss $\mathcal{M}, s \Vdash \Box\sigma(Z')[= \sigma(\Box Z')]$.

Näin ollen jos $\mathcal{M}, t \not\Vdash \sigma(X)$, niin $\mathcal{M}', t \not\Vdash X$, joten X ei ole $\mathbf{F}$-pätevä.$\blacksquare$

Normaalit modaalilogiikat

Seurauslause. Jos $\mathbf{L}$ on ei-tyhjä kehysten joukko, niin $\mathbf{L}$-pätevien lauseiden joukko on propositionaalinen modaalilogiikka.

Merkintää $\mathbf{L}$ voidaan käyttää kahdessa merkityksessä:

(1) kehysjoukko ja (2) kehysjoukossa pätevien lauseiden joukko.

Määritelmä. Propositionaalista modaalilogiikkaa sanotaan normaaliksi, jos se sisältää (i) kaikki muotoa $\Box(P \to Q) \to (\Box P \to \Box Q)$ olevat lauseet ja (ii) lauseen $\Box P$ aina, kun siihen kuuluu P.

Määritelmä. Lausejoukkoa $\mathcal{L}$ sanotaan *kehyslogiikaksi*, jos $\mathcal{L}$ on $\mathbf{L}$-pätevien lauseiden joukko jollekin ei-tyhjälle kehysten joukolle $\mathbf{L}$.

Samaa merkintää $\mathbf{L}$ voidaan käyttää sekä logiikasta että vastaavasta kehysjoukosta.