

## Ratkaisumenetelmät

- Temporaalilogiikat (CTL/LTL) ratkevia, koska niillä on äärellisen mallin ominaisuus (vastamallin koolle yläraja), mutta tehokkaampia ratkaisumenetelmiä saadaan taulujen ja automaattiteorian avulla.
- Taulumenetelmä (esim. CTL)
  - (i) Rakennetaan tutkittavalle lauseelle taulugraafi, joka sisältää (oleellisesti) kaikki lauseen mahdolliset mallit.
  - (ii) Karsitaan taulua ja tarkastetaan, jäikö siihen ko. lauseen malleja.
- Automaattiteoreettinen menetelmä (esim. LTL)
  - (i) Rakennetaan tutkittavalle lauseelle äärellistilainen (Büchi-) automaatti, joka hyväksyy äärettömän pitkiä sanoja (polkuja) siten, että automaatti hyväksyy (oleellisesti) kaikki lauseen toteuttavat täydet polut.
  - (ii) Tarkistetaan, onko automaatin hyväksymä kieli tyhjä.

## Positiivinen normaalimuoto

CTL-lause muunnetaan **positiiviseen normaalimuotoon** seuraavilla säännöillä:

$$P \rightarrow Q \quad \mapsto \quad \neg P \vee Q \qquad \neg \mathbf{A}(PUQ) \quad \mapsto \quad \mathbf{E}(\neg PBQ)$$

$$\neg(P \vee Q) \quad \mapsto \quad \neg P \wedge \neg Q \qquad \neg \mathbf{E}(PUQ) \quad \mapsto \quad \mathbf{A}(\neg PBQ)$$

$$\neg(P \wedge Q) \quad \mapsto \quad \neg P \vee \neg Q \qquad \neg \mathbf{A}(PBQ) \quad \mapsto \quad \mathbf{E}(\neg PUQ)$$

$$\neg \neg P \quad \mapsto \quad P \qquad \neg \mathbf{E}(PBQ) \quad \mapsto \quad \mathbf{A}(\neg PUQ)$$

$$\neg \mathbf{A}GP \quad \mapsto \quad \mathbf{E}\neg P$$

$$\neg \mathbf{E}FP \quad \mapsto \quad \mathbf{A}\neg P$$

$$\neg \mathbf{E}GP \quad \mapsto \quad \mathbf{A}\neg P$$

$$\neg \mathbf{A}FP \quad \mapsto \quad \mathbf{E}\neg P$$

$$\neg \mathbf{A}XP \quad \mapsto \quad \mathbf{E}\neg P$$

$$\neg \mathbf{E}XP \quad \mapsto \quad \mathbf{A}\neg P$$

Huom! Lyhennysmerkinnät:

$$\mathbf{A}(PBQ) : \quad \neg \mathbf{E}(\neg P)UQ$$

$$\mathbf{E}(PBQ) : \quad \neg \mathbf{A}(\neg P)UQ$$

## Taulumenetelmä CTL:lle

CTL:n taulu on bipartiitti graafi, jossa on solmut ovat lausejoukkoja ja niitä on kahdentyyppisiä: OR-solmuja ja AND-solmuja.

Lauseelle  $P$  taulu rakennetaan muuntamalla  $P$  ensin **positiiviseen normaalimuotoon** (jossa negatiot esiintyvät vain atomilauseiden edessä) ja etenemällä sitten kahdessa vaiheessa:

- (i) rakennetaan alustava taulu  $T_0$  ja
- (ii) muodostetaan lopullinen taulu  $T_1$  karsintasäännöillä taulusta  $T_0$ .

## Positiivinen normaalimuoto (II)

- Positiivisessa normaalimuodossa käytetään konnektiiveja  $\wedge, \vee$  ja negatioita esiintyy vain atomilauseiden edessä.
- Merkintä  $\sim P$ : lauseen  $\neg P$  positiivinen normaalimuoto.

### Esimerkki.

$$\sim \mathbf{A}\mathbf{G}(R \rightarrow (\neg Q \wedge \mathbf{A}(PUQ))) : \mathbf{E}\mathbf{F}(R \wedge (Q \vee \mathbf{E}(\neg PBQ)))$$

$$\text{koska } \neg \mathbf{A}\mathbf{G}(R \rightarrow (\neg Q \wedge \mathbf{A}(PUQ)))$$

$$\mapsto \mathbf{E}\mathbf{F}\neg(\neg R \vee (\neg Q \wedge \mathbf{A}(PUQ)))$$

$$\mapsto \mathbf{E}\mathbf{F}(R \wedge \neg(\neg Q \wedge \mathbf{A}(PUQ)))$$

$$\mapsto \mathbf{E}\mathbf{F}(R \wedge (Q \vee \neg \mathbf{A}(PUQ)))$$

$$\mapsto \mathbf{E}\mathbf{F}(R \wedge (Q \vee \mathbf{E}(\neg PBQ)))$$

## Alustava taulu

Alustavan taulun  $T_0$  muodostaminen:

- Aloitetaan OR-solmusta  $D_0 = \{P\}$ .
- OR-solmun  $D$  seuraajat ovat AND-solmuja, jotka saadaan soveltamalla  $\alpha/\beta$ -sääntöjä solmuun  $D$ .
- AND-solmun  $C$  seuraajat ovat OR-solmuja, jotka saadaan seuraajasäännöllä solmusta  $C$ .
- Huom! Jos OR-solmun  $D$  seuraaja (lausejoukko)  $C$  esiintyy jo taulussa, ei tauluun tule toista kopiota, vaan  $D$ :n seuraajaksi tulee jo olemassa oleva solmu  $C$ . Samoin AND-solmuille.

⇒ Taulu äärellinen

## OR-solmun seuraajat (II)

$\beta$ -säännöt:

$$\frac{P \vee Q}{P \mid Q} \quad \frac{\mathbf{AFP}}{P \mid \mathbf{AXAFP}} \quad \frac{\mathbf{EFP}}{P \mid \mathbf{EXEFP}}$$

$$\frac{\mathbf{A}(PUQ)}{Q \mid P \wedge \mathbf{AXA}(PUQ)} \quad \frac{\mathbf{E}(PUQ)}{Q \mid P \wedge \mathbf{EXE}(PUQ)}$$

Huom! Literaaleille sekä  $\mathbf{AXP}$ - ja  $\mathbf{EXP}$ -lauseille ei sääntöjä.

## OR-solmun seuraajat

OR-solmun  $D$  seuraajat ovat  $D$ :sta seuraavilla  $\alpha$ - ja  $\beta$ -säännöillä saatavat alaspäin suljetut joukot.

Joukko  $C$  on alaspäin suljettu, kun seuraavat kaksi ehtoa toteutuvat:

(i) Jos  $\alpha \in C$ ,  $\alpha_1 \in C$  ja  $\alpha_2 \in C$ .

(ii) Jos  $\beta \in C$ ,  $\beta_1 \in C$  tai  $\beta_2 \in C$ .

$\alpha$ -säännöt:

$$\frac{P \wedge Q}{P} \quad \frac{\mathbf{AGP}}{P} \quad \frac{\mathbf{EGP}}{P}$$

$$Q \quad \mathbf{AXAGP} \quad \mathbf{EXEGP}$$

$$\frac{\mathbf{A}(PBQ)}{\sim Q} \quad \frac{\mathbf{E}(PBQ)}{\sim Q}$$

$$P \vee \mathbf{AXA}(PBQ) \quad P \vee \mathbf{EXE}(PBQ)$$

## OR-solmun seuraajat (II)

**Esimerkki.**

Olkoon  $D = \{\mathbf{AFEF}((P \wedge Q) \vee R)\}$

$D$ :sta saatavat alaspäin suljetut joukot ovat:

$C_1 = \{\mathbf{AFEF}((P \wedge Q) \vee R), \mathbf{EF}((P \wedge Q) \vee R), (P \wedge Q) \vee R, P \wedge Q, P, Q\}$

$C_2 = \{\mathbf{AFEF}((P \wedge Q) \vee R), \mathbf{EF}((P \wedge Q) \vee R), (P \wedge Q) \vee R, R\}$

$C_3 = \{\mathbf{AFEF}((P \wedge Q) \vee R), \mathbf{EF}((P \wedge Q) \vee R), \mathbf{EXEF}((P \wedge Q) \vee R)\}$

$C_4 = \{\mathbf{AFEF}((P \wedge Q) \vee R), \mathbf{AXAFEF}((P \wedge Q) \vee R)\}$

(Alaspäin suljetut joukot voidaan rakentaa lauselogiikan taulumenetelmän tapaan.)

## AND-solmun seuraajat

AND-solmun  $C$  seuraajat saadaan *seuraajasäännöllä*:

Olkoon joukossa  $C$  seuraavatilalauseet:

$\mathbf{A}XP_1, \dots, \mathbf{A}XP_l,$

$\mathbf{E}XQ_1, \dots, \mathbf{E}XQ_k.$

Tällöin  $C$ :llä on seuraajat:

$D_1 = \{P_1, \dots, P_l, Q_1\}, \dots, D_k = \{P_1, \dots, P_l, Q_k\}$

(Jos joukossa  $C$  ei ole muotoa  $\mathbf{E}XQ_i$  olevia lauseita, joukolla on yksi seuraaja  $\{P_1, \dots, P_l\}$ .)

**Esimerkki.** Olkoon

$C = \{\mathbf{A}(PUQ), \mathbf{A}XA(PUQ), \mathbf{E}GP, P, \mathbf{E}XEGP, \mathbf{E}FQ, \mathbf{E}XEFQ\}.$

Tällöin  $C$ :n seuraajat ovat

$D_1 = \{\mathbf{A}(PUQ), \mathbf{E}GP\}$  ja  $D_2 = \{\mathbf{A}(PUQ), \mathbf{E}FQ\}.$

(Huom! Kullakin AND-solmulla on ainakin yksi seuraaja.)

## Karsintasäännöt (II)

Tulevaisuuslauseiden toteutuminen taulussa määritellään seuraavasti:

- Tulevaisuuslause  $\mathbf{E}FQ$  ( $\mathbf{E}(PUQ)$ ) toteutuu AND-solmussa  $C$ , joss taulusta löytyy solmusta  $C$  lähtevä polku AND-solmuun  $C'$ , jossa on lause  $Q$  (ja polun kaikissa muissa AND-solmuissa on lause  $P$ ).
- Tulevaisuuslause  $\mathbf{A}FQ$  ( $\mathbf{A}(PUQ)$ ) toteutuu AND-solmussa  $C$ , joss taulusta löytyy asyklinen aligraafi, jolle pätee:
  - (i) Aligraafin juuri on solmu  $C$ .
  - (ii) Kullekin OR-sisäsolmulle täsmälleen yksi sen AND-seuraajasolmu on aligraafissa.
  - (iii) Kullekin AND-sisäsolmulle kaikki sen OR-seuraajasolmut ovat mukana aligraafissa.
  - (iv) Kaikissa aligraafin lehtisolmuissa on lause  $Q$  (ja kaikissa muissa AND-solmuissa  $P$ ).

## Karsintasäännöt

Alustavasta taulusta  $T_0$  saadaan lopullinen taulu suorittamalla karsintaa seuraavilla säännöllä, kunnes mitään niistä ei voida soveltaa.

- Poistetaan AND-solmu, joka sisältää lauseen ja sen negaation.
- Poistetaan AND-solmu, jos yksikin sen alkuperäisistä seuraajista on poistettu.
- Poistetaan OR-solmu, jos kaikki sen alkuperäisistä seuraajista on poistettu.
- Poistetaan AND-solmu, jos jokin sen **tulevaisuuslause** ei toteudu tämän hetkessä taulussa (mallintarkastus).

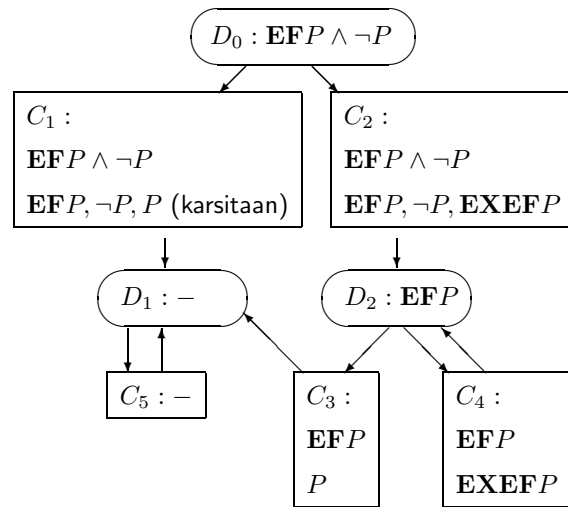
Tulevaisuuslauseita ovat seuraavaa muotoa olevat lauseet:

$\mathbf{E}(PUQ), \mathbf{E}FQ, \mathbf{A}(PUQ), \mathbf{A}FQ$

**Esimerkki.** Olkoon  $D_0 = \{\mathbf{E}FP \wedge \neg P\}.$

- $D_0$ :n AND-seuraajat:  
 $C_1 = \{\mathbf{E}FP \wedge \neg P, \mathbf{E}FP, \neg P, P\}$  ja  
 $C_2 = \{\mathbf{E}FP \wedge \neg P, \mathbf{E}FP, \neg P, \mathbf{E}XEFP\}$
- $C_1$ :n OR-seuraajat:  $D_1 = \{\}$  (Huom. väh. yksi seuraaja.)  
 $C_2$ :n OR-seuraajat:  $D_2 = \{\mathbf{E}FP\}$
- $D_2$ :n AND-seuraajat:  $C_3 = \{\mathbf{E}FP, P\}$  ja  $C_4 = \{\mathbf{E}FP, \mathbf{E}XEFP\}$
- $D_1$ :n AND-seuraajat:  $C_5 = \{\}$
- $C_3$ :n OR-seuraajat:  $\{\} = D_1$   
 $C_4$ :n OR-seuraajat:  $\{\mathbf{E}FP\} = D_2$   
 $C_5$ :n OR-seuraajat:  $\{\} = D_1$
- Alustava taulu  $T_0$  on valmis.
- Karsinta: Poistetaan  $C_1$  (lause ja negaatio). Lopullinen taulu  $T_1$  valmis (tulevaisuuslause  $\mathbf{E}FP$  toteutuu AND-solmuissa  $C_2, C_3, C_4$ ).

(Esimerkki jatkuu.) Yleensä taulut tehdään graafin muotoon:



© 2005 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

**Esimerkki.** Anna CTL-lauseelle  $\mathbf{EFP} \wedge \neg P$  malli.

Muodostetaan malli  $\langle S, R, v \rangle$  edellä annetusta taulusta  $T_1$  esimerkiksi seuraavasti:

$S = \{C_2, C_3, C_5\}$ ,  $R = \{\langle C_2, C_3 \rangle, \langle C_3, C_5 \rangle, \langle C_5, C_5 \rangle\}$ ,  
 $v(P, s) = \text{true}$ , jos  $s = C_3$ , muutoin  $v(P, s) = \text{false}$ .

Toinen vaihtoehto:

$S = \{C_2, C_3, C_4, C_5\}$ ,  $R = \{\langle C_2, C_4 \rangle, \langle C_4, C_3 \rangle, \langle C_3, C_5 \rangle, \langle C_5, C_5 \rangle\}$ ,  
 $v(P, s) = \text{true}$ , jos  $s = C_3$ , muutoin  $v(P, s) = \text{false}$ .

Huom! Esimerkiksi malli, jossa

$S = \{C_2, C_4\}$ ,  $R = \{\langle C_2, C_4 \rangle, \langle C_4, C_4 \rangle\}$ ,  
 $v(P, C_2) = v(P, C_4) = \text{false}$

ei kelpaa, koska solmujen  $C_2$  ja  $C_4$  tulevaisuuslause  $\mathbf{EFP}$  ei toteudu tässä mallissa.

© 2005 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

## CTL-toteutus tauluilla

**Teoreema.** Olkoon CTL-lause  $P$  positiivisessa normaalimuodossa. Tällöin  $P$  on toteutuva joss lopullisessa taulussa  $T_1$  on AND-solmu, joka sisältää lauseen  $P$ .

- CTL-taulu antaa lauseen  $P$  mallin:

Mallin tilat AND-solmuja ja valuaatio suoraan AND-solmun sisältämistä atomilauseista.

Malliin mukaan ainakin yksi AND-solmu, joka sisältää lauseen  $P$ . Seuraajat valittava siten, että malli on sarjallinen ja että kaikkien mukaan tulevien AND-solmujen tulevaisuuslauseet toteutuvat.

- Huom! Taulumenetelmää voidaan käyttää ohjelmasynteesissä (muodostamaan järjestelmän ohjausrakenne):
  - (i) Annetaan ohjelman määrittely CTL-lauseina.
  - (ii) Haetaan taulumenetelmällä määrittelylle malli (antaa ohjelman ohjausrakenteen).

© 2005 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

## CTL-pätevyys tauluilla

- Lause on pätevä joss sen negaatio ei ole toteutuva.
- Toteutus voidaan selvittää taulumenetelmällä:
  - (i) Muodostetaan lauseen  $\varphi$  negaation positiivinen normaalimuoto  $\sim\varphi$ .
  - (ii) Rakennetaan taulu lauseelle  $\sim\varphi$ .
- $\varphi$  on pätevä joss  $\sim\varphi$  ei ole toteutuva joss lopullisessa taulussa ei ole yhtään AND-solmua, joka sisältää lauseen  $\sim\varphi$ .

© 2005 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

**Esimerkki.** Onko CTL-lause  $\varphi$ :

$$\mathbf{EX}(P \vee Q) \rightarrow (\mathbf{EXP} \vee \mathbf{EXQ})$$

pätevä?

Lauseen  $\neg\varphi$  positiivinen normaalimuoto  $\sim\varphi$ :

$$\neg(\mathbf{EX}(P \vee Q) \rightarrow (\mathbf{EXP} \vee \mathbf{EXQ}))$$

$$\mapsto \mathbf{EX}(P \vee Q) \wedge \neg(\mathbf{EXP} \vee \mathbf{EXQ})$$

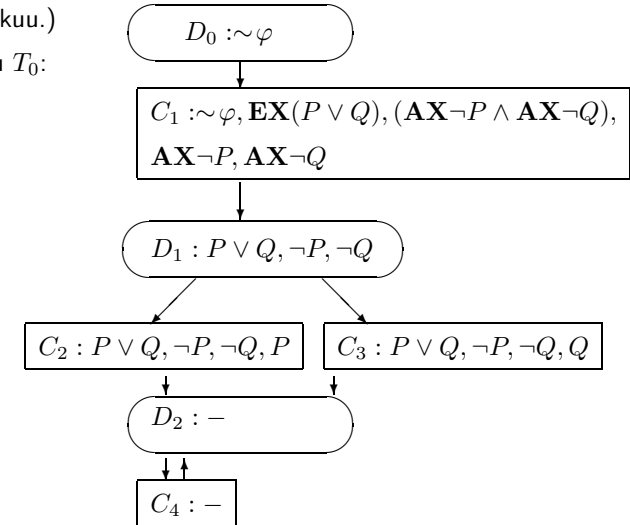
$$\mapsto \mathbf{EX}(P \vee Q) \wedge (\neg\mathbf{EXP} \wedge \neg\mathbf{EXQ})$$

$$\mapsto \mathbf{EX}(P \vee Q) \wedge (\mathbf{AX}\neg P \wedge \mathbf{AX}\neg Q)$$

$$\sim\varphi: \mathbf{EX}(P \vee Q) \wedge (\mathbf{AX}\neg P \wedge \mathbf{AX}\neg Q)$$

(Esimerkki jatkuu.)

Alustava taulu  $T_0$ :



(Esimerkki jatkuu.)

Taulu:  $D_0 = \{\sim\varphi\}$ .

- $D_0$ :n AND-seuraajat:  
 $C_1 = \{\sim\varphi, \mathbf{EX}(P \vee Q), (\mathbf{AX}\neg P \wedge \mathbf{AX}\neg Q), \mathbf{AX}\neg P, \mathbf{AX}\neg Q\}$
- $C_1$ :n OR-seuraajat:  $D_1 = \{P \vee Q, \neg P, \neg Q\}$
- $D_1$ :n AND-seuraajat:  
 $C_2 = D_1 \cup \{P\}$  ja  $C_3 = D_1 \cup \{Q\}$
- $C_2$ :n OR-seuraajat:  $D_3 = \{\}$   
 $C_3$ :n OR-seuraajat:  $\{\} = D_3$   
 $D_3$ :n AND-seuraajat:  $C_4 = \{\}$   
 $C_4$ :n OR-seuraajat:  $\{\} = D_3$
- Alustava taulu  $T_0$  on valmis.

(Esimerkki jatkuu.)

- Karsinta:
  - $C_2, C_3$  voidaan poistaa (sisältävät lauseen ja sen negaation)
  - $D_1$  voidaan poistaa (ei seuraajia)
  - $C_1$  voidaan poistaa (seuraaja poistettu)
  - $D_0$  voidaan poistaa (ei seuraajia)

Lopullinen taulu  $T_1$  valmis.

Taulussa  $T_1$  ei ole AND-solmua, jossa esiintyy  $\sim\varphi$ .

$\Rightarrow \sim\varphi$  ei ole toteutuva. Siis  $\varphi$  on pätevä.

## LTL-toteutus tauluilla

CTL-taulut antavat menetelmän myös LTL-toteutuvuuden tarkastamiseen:

**Teoreema.** Olkoon LTL-lause  $P$  positiivisessa normaalimuodossa ja CTL-lause  $P'$  saatu siitä korvaamalla operaattorit **F**, **G**, **X**, **U**, **B**, operaattoreilla **AF**, **AG**, **AX**, **AU**, **AB**. Tällöin  $P$  on LTL-toteutuva joss  $P'$  on CTL-toteutuva.

### Esimerkki.

LTL-lause  $\mathbf{G}(\neg \mathbf{P}\mathbf{U}\mathbf{Q})$  on toteutuva joss

CTL-lause  $\mathbf{AGA}(\neg \mathbf{P}\mathbf{U}\mathbf{Q})$  on toteutuva.

## Tehokkaasti toteutettavia aliluokkia

- Toteutusongelma ratkeaa polynomisessa ajassa esim. ohjelmasynteesin kannalta mielenkiintoisissa tapauksissa.
- Esim. SCTL (yksinkertaistettu CTL)
 
$$P_1 \vee \dots \vee P_n$$

$$\mathbf{AG}(P_1 \vee \dots \vee P_n)$$

$$\mathbf{AG}(P_0 \rightarrow \mathbf{AF}(P_1 \vee \dots \vee P_n))$$

$$\mathbf{AG}(P_0 \rightarrow \mathbf{A}(P_1 \vee \dots \vee P_n \mathbf{U} Q_1 \vee \dots \vee Q_m))$$

$$\mathbf{AG}(P_0 \rightarrow \mathbf{AX}(P_1 \vee \dots \vee P_n) \wedge$$

$$\mathbf{EX}(Q_1 \vee \dots \vee Q_m) \wedge \dots \wedge \mathbf{EX}(R_1 \vee \dots \vee R_l))$$
 jossa ESC-oletus pätee: tulevaisuuslauseet eivät riipu historiasta.
- Esim. RLTL (rajoitettu LTL):  $\mathbf{G}(P_1 \vee \dots \vee P_n)$ 

$$\mathbf{G}(P_0 \rightarrow \mathbf{F}(P_1 \vee \dots \vee P_n))$$

$$\mathbf{G}(P_0 \rightarrow \mathbf{X}(P_1 \vee \dots \vee P_n))$$

## Laskennallinen vaativuus

- CTL
  - Mallintarkastus: **P**-täydellinen
  - $O(|M| \cdot |P|)$
  - Toteutus: **EXPTIME**-täydellinen
- LTL
  - Mallintarkastus: **PSPACE**-täydellinen
  - $O(|M| \cdot \exp(|P|))$
  - Toteutus: **PSPACE**-täydellinen
- CTL\*
  - Mallintarkastus: **PSPACE**-täydellinen
  - $O(|M| \cdot \exp(|P|))$
  - Toteutus: **2EXPTIME**-täydellinen