Johdantoa modaalilogiikkaan

- Käsitteiden välttämätön, aikominen, tietäminen, uskominen, tuleva, mennyt, todistuva, tosi tapahtuman jälkeen, . . . logiikkaa
- Mitkä ovat ko. käsitteiden ominaisuudet?

  Jos tiedät jotain, tiedätkö että tiedät sen?

  Jos et tiedät jotain, tiedätkö ettet tiedät sitä?

  Jos tiedät jotain, onko asia totta?
- Systemaattinen (Kripke/mahdollisten maailmojen) semantiikkaan perustuva lähestymistapa.

© 2005 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

Esimerkki: Mutaiset lapset—tietämyslogiikka

- Kaksi lasta, joilla kummallakin mutainen otsa.
- Lapset näkevät toisensa.
- Äiti sanoo: "ainakin toisella on mutainen otsa".
- Äiti kysyy: "tiedättekö, onko otsanne mutainen vai ei"?
- Molemmat vastaavat "en tiedä".
- Äiti kysyy: "tiedättekö, onko otsanne mutainen vai ei"?
- Molemmat vastaavat: "tiedän otsani olevan mutainen".

Formalisointi: Lapset a ja b.
A: a:lla mutainen otsa / B: b:lla mutainen otsa
K_aB: a tietää, että b:lla on mutainen otsa.

© 2005 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

Äiti sanoo: "ainakin toisella on mutainen otsa".

$A \vee B$
$K_a(A \vee B)$
$K_b(A \vee B)$

$$K_aK_b(A \vee B) \tag{1}$$

Lapset näkevät toisensa.

$$K_a(K_bA \vee K_b\neg A) \tag{2}$$

Äiti kysyy: "tiedättekö, onko otsanne mutainen vai ei"? Molemmat vastaavat "en tiedä".

$$K_a\neg K_bB \tag{3}$$

Lauseista 1–3 seuraa K_aA.

Millä perusteella?

© 2005 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

Semanttinen tarkaskelu

Miten esitetään tietämistä ja ei-tietämistä?

- Joukko lauselogiikan malleja (mahdollisia maailmoja).
- a tietää P:n (K_aP) joss P tosi kaikissa mahdollisissa maailmoissa. Esim. Olkoon a:n mahdollisten maailmojen joukko $\{\{P, Q\}, \{Q\}\}$. Tällöin K_aQ on tosi, mutta K_aP ei ole.
- Mitkä maailmat mahdollisia?

  Formalisoidaan tietäminen seuraavasti:
  Kussakin maailmassa s agentilla a on joukko a:n kannalta samanarvoisia mahdollisia maailmoja.
  $\boxed{\Rightarrow}$ Kaikkien maailmojen luokka jakaantuu agentin a kannalta kokoelmaksi erillisiä joukkoja mahdollisia maailmoja. Samoin b:n kannalta.

© 2005 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

Osoitetaan, että lauseista 1–3 loogisesti seuraa $K_a A$, t.s. että jokaisessa tietämysmallin maailmassa, jossa lauseet 1–3 ovat totta, on $K_a A$ totta.

Olkoon S jokin a:n kannalta mahdollisten maailmojen joukko ja s eräs S:n maailma.
S jakaantuu erillisiin joukkoihin $T_1, T_2, \ldots$ b:n kannalta mahdollisia maailmoja.

- Lause (2) $K_a(K_b A \vee K_b \neg A)$ tosi s:ssä. Siis $(K_b A \vee K_b \neg A)$ tosi kaikissa S:n maailmoissa.

  $\boxed{\Rightarrow}$ Kaikille $i = 1, 2, \ldots$
  joko A on tosi kaikissa T_i:n maailmoissa tai
  A on epätosi kaikissa T_i:n maailmoissa.

© 2005 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

- Lause (1) $K_a K_b(A \vee B)$ tosi s:ssä.

  Siis $K_b(A \vee B)$ tosi kaikissa S:n maailmoissa.

  $\boxed{\Rightarrow}$ Kaikille $i = 1, 2, \ldots$
  $A \vee B$ on tosi kaikissa T_i:n maailmoissa.
  $\boxed{\Rightarrow}$ Kaikille $i = 1, 2, \ldots$
  joko A on tosi kaikissa T_i:n maailmoissa tai
  B on tosi kaikissa T_i:n maailmoissa.

© 2005 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

- Lause (3) $K_a \neg K_b B$ tosi s:ssä.

  Siis $\neg K_b B$ tosi kaikissa S:n maailmoissa.

  $\boxed{\Rightarrow}$ Kaikille $i = 1, 2, \ldots$
  B on epätosi jossain T_i:n maailmassa.
  $\boxed{\Rightarrow}$ Kaikille $i = 1, 2, \ldots$
  A on tosi kaikissa T_i:n maailmoissa.
  $\boxed{\Rightarrow}$ A on tosi kaikissa S:n maailmoissa.
  $\boxed{\Rightarrow}$ $K_a A$ tosi s:ssä

© 2005 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

Syntaktinen tarkastelu

Mitä tietämiseen liittyviä periaatteita tarvitaan?

- **Prop. päättely:** tautologiat + MP: $\dfrac{P, P \to Q}{Q}$
- **Distributiivisuusaksiooma:** $K_a(P \to Q) \to (K_a P \to K_a Q)$
- **N-sääntö:**

$$\frac{P}{K_a P}$$

© 2005 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

- **R-sääntö:**

$$\frac{P \to Q}{K_a P \to K_a Q}$$

Huom! Johdettu sääntö:

1.	$P \to Q$	
2.	$K_a(P \to Q)$	[N, 1]
3.	$K_a(P \to Q) \to (K_a P \to K_a Q)$	[Distr]
4.	$(K_a P \to K_a Q)$	[MP, 2,3]

- **T-aksiooma:** $K_a P \to P$

© 2005 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

Lauseen $K_a A$ johto premisseistä 1–3 käyttäen edellä annettuja tietämiseen liittyviä periaatteita:

1.	$K_a K_b(\neg A \to B)$	[P1]	9.	$K_a(\neg K_b B \to \neg K_b \neg A)$	[MP, 6, 8]
2.	$K_a(\neg K_b \neg A \to K_b A)$	[P2]	10.	$K_a(\neg K_b B \to \neg K_b \neg A) \to (K_a \neg K_b B \to K_a \neg K_b \neg A)$	[Distr]
3.	$K_a \neg K_b B$	[P3]	11.	$K_a \neg K_b B \to K_a \neg K_b \neg A$	[MP, 9, 10]
4.	$K_b(\neg A \to B) \to (K_b \neg A \to K_b B)$	[Distr]	12.	$K_a \neg K_b \neg A$	[MP, 3, 11]
5.	$K_a K_b(\neg A \to B) \to K_a(K_b \neg A \to K_b B)$	[R, 4]	13.	$K_a(\neg K_b \neg A \to K_b A) \to (K_a \neg K_b \neg A \to K_a K_b A)$	[Distr]
6.	$K_a(K_b \neg A \to K_b B)$	[MP, 1, 5]	14.	$K_a \neg K_b \neg A \to K_a K_b A$	[MP, 2, 13]
7.	$(K_b \neg A \to K_b B) \to (\neg K_b B \to \neg K_b \neg A)$	[Taut]	15.	$K_a K_b A$	[MP, 12, 14]
8.	$K_a(K_b \neg A \to K_b B) \to K_a(\neg K_b B \to \neg K_b \neg A)$	[R, 7]	16.	$K_b A \to A$	[T]
			17.	$K_a K_b A \to K_a A$	[R, 16]
			18.	$K_a A$	[MP, 15, 17]

© 2005 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio