# Johdantoa modaalilogiikkaan

- Käsitteiden välttämätön, aikominen, tietäminen, uskominen, tuleva, mennyt, todistuva, tosi tapahtuman jälkeen, . . . logiikkaa
- Mitkä ovat ko. käsitteiden ominaisuudet?
  Jos tiedät jotain, tiedätkö että tiedät sen?
  Jos et tiedät jotain, tiedätkö ettet tiedät sitä?
  Jos tiedät jotain, onko asia totta?
- Systemaattinen (Kripke/mahdollisten maailmojen) semantiikkaan perustuva lähestymistapa.





## Esimerkki: Mutaiset lapset—tietämyslogiikka

- Kaksi lasta, joilla kummallakin mutainen otsa.
- Lapset näkevät toisensa.
- Äiti sanoo: "ainakin toisella on mutainen otsa".
- Äiti kysyy: "tiedättekö, onko otsanne mutainen vai ei"?
- Molemmat vastaavat "en tiedä".
- Äiti kysyy: "tiedättekö, onko otsanne mutainen vai ei"?
- Molemmat vastaavat: "tiedän otsani olevan mutainen".

Formalisointi: Lapset $a$ ja $b$.
$A$: a:lla mutainen otsa / $B$: b:lla mutainen otsa
$K_aB$: a tietää, että b:lla on mutainen otsa.





Äiti sanoo: "ainakin toisella on mutainen otsa".

$A \vee B$
$K_a(A \vee B)$
$K_b(A \vee B)$

$$K_aK_b(A \vee B) \tag{1}$$

Lapset näkevät toisensa.

$$K_a(K_bA \vee K_b\neg A) \tag{2}$$

Äiti kysyy: "tiedättekö, onko otsanne mutainen vai ei"? Molemmat vastaavat "en tiedä".

$$K_a\neg K_bB \tag{3}$$

Lauseista 1–3 seuraa $K_aA$.

Millä perusteella?





## Semanttinen tarkaskelu

Miten esitetään tietämistä ja ei-tietämistä?

- Joukko lauselogiikan malleja (mahdollisia maailmoja).
- $a$ tietää $P$:n ($K_aP$) joss $P$ tosi kaikissa mahdollisissa maailmoissa.
  Esim. Olkoon $a$:n mahdollisten maailmojen joukko $\{\{P,Q\},\{Q\}\}$.
  Tällöin $K_aQ$ on tosi, mutta $K_aP$ ei ole.
- Mitkä maailmat mahdollisia?
  Formalisoidaan tietäminen seuraavasti:
  Kussakin maailmassa $s$ agentilla $a$ on joukko $a$:n kannalta samanarvoisia mahdollisia maailmoja.
  $\boxed{\Rightarrow}$ Kaikkien maailmojen luokka jakaantuu agentin $a$ kannalta kokoelmaksi erillisiä joukkoja mahdollisia maailmoja. Samoin $b$:n kannalta.

Osoitetaan, että lauseista 1–3 loogisesti seuraa $K_a A$, t.s. että jokaisessa tietämysmallin maailmassa, jossa lauseet 1–3 ovat totta, on $K_a A$ totta.

Olkoon $S$ jokin $a$:n kannalta mahdollisten maailmojen joukko ja $s$ eräs $S$:n maailma.
$S$ jakaantuu erillisiin joukkoihin $T_1, T_2, \ldots$ $b$:n kannalta mahdollisia maailmoja.

- Lause (2) $K_a(K_b A \lor K_b \neg A)$ tosi $s$:ssä. Siis $(K_b A \lor K_b \neg A)$ tosi kaikissa $S$:n maailmoissa.
  $\boxed{\Rightarrow}$ Kaikille $i = 1, 2, \ldots$
  joko A on tosi kaikissa $T_i$:n maailmoissa tai
  A on epätosi kaikissa $T_i$:n maailmoissa.





- Lause (1) $K_a K_b(A \lor B)$ tosi $s$:ssä.
  Siis $K_b(A \lor B)$ tosi kaikissa $S$:n maailmoissa.
  $\boxed{\Rightarrow}$ Kaikille $i = 1, 2, \ldots$
  $A \lor B$ on tosi kaikissa $T_i$:n maailmoissa.
  $\boxed{\Rightarrow}$ Kaikille $i = 1, 2, \ldots$
  joko $A$ on tosi kaikissa $T_i$:n maailmoissa tai
  $B$ on tosi kaikissa $T_i$:n maailmoissa.





- Lause (3) $K_a \neg K_b B$ tosi $s$:ssä.
  Siis $\neg K_b B$ tosi kaikissa $S$:n maailmoissa.
  $\boxed{\Rightarrow}$ Kaikille $i = 1, 2, \ldots$
  $B$ on epätosi jossain $T_i$:n maailmassa.
  $\boxed{\Rightarrow}$ Kaikille $i = 1, 2, \ldots$
  $A$ on tosi kaikissa $T_i$:n maailmoissa.
  $\boxed{\Rightarrow}$ $A$ on tosi kaikissa $S$:n maailmoissa.
  $\boxed{\Rightarrow}$ $K_a A$ tosi $s$:ssä





## Syntaktinen tarkastelu

Mitä tietämiseen liittyviä periaatteita tarvitaan?

- **Prop. päättely:** tautologiat + MP: $\dfrac{P, P \to Q}{Q}$
- **Distributiivisuusaksiooma:** $K_a(P \to Q) \to (K_a P \to K_a Q)$
- **N-sääntö:**

$$\frac{P}{K_a P}$$

- **R-sääntö:**

$$\frac{P \to Q}{K_a P \to K_a Q}$$

Huom! Johdettu sääntö:

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $P \to Q$ | |
| 2. | $K_a(P \to Q)$ | [N, 1] |
| 3. | $K_a(P \to Q) \to (K_a P \to K_a Q)$ | [Distr] |
| 4. | $(K_a P \to K_a Q)$ | [MP, 2,3] |

- **T-aksiooma:** $K_a P \to P$





Lauseen $K_a A$ johto premisseistä 1–3 käyttäen edellä annettuja tietämiseen liittyviä periaatteita:

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $K_a K_b(\neg A \to B)$ | [P1] |
| 2. | $K_a(\neg K_b \neg A \to K_b A)$ | [P2] |
| 3. | $K_a \neg K_b B$ | [P3] |
| 4. | $K_b(\neg A \to B) \to (K_b \neg A \to K_b B)$ | [Distr] |
| 5. | $K_a K_b(\neg A \to B) \to K_a(K_b \neg A \to K_b B)$ | [R, 4] |
| 6. | $K_a(K_b \neg A \to K_b B)$ | [MP, 1, 5] |
| 7. | $(K_b \neg A \to K_b B) \to (\neg K_b B \to \neg K_b \neg A)$ | [Taut] |
| 8. | $K_a(K_b \neg A \to K_b B) \to K_a(\neg K_b B \to \neg K_b \neg A)$ | [R, 7] |
| 9. | $K_a(\neg K_b B \to \neg K_b \neg A)$ | [MP, 6, 8] |
| 10. | $K_a(\neg K_b B \to \neg K_b \neg A) \to (K_a \neg K_b B \to K_a \neg K_b \neg A)$ | [Distr] |
| 11. | $K_a \neg K_b B \to K_a \neg K_b \neg A$ | [MP, 9, 10] |
| 12. | $K_a \neg K_b \neg A$ | [MP, 3, 11] |
| 13. | $K_a(\neg K_b \neg A \to K_b A) \to (K_a \neg K_b \neg A \to K_a K_b A)$ | [Distr] |
| 14. | $K_a \neg K_b \neg A \to K_a K_b A$ | [MP, 2, 13] |
| 15. | $K_a K_b A$ | [MP, 12, 14] |
| 16. | $K_b A \to A$ | [T] |
| 17. | $K_a K_b A \to K_a A$ | [R, 16] |
| 18. | $K_a A$ | [MP, 15, 17] |