T-79.146 **Kevät 2004**
Logiikka tietotekniikassa: erityiskysymyksiä I
Laskuharjoitus 9
Ratkaisut

1. Perusoperaattori

$$\mathcal{M}, s \models \mathbf{AX}P, \text{ joss } \mathcal{M}, t \models P \text{ kaikille } t, \text{ joille } sRt$$

Korvataan P $\neg P$:llä:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M}, s \models \mathbf{AX}\neg P, \text{ joss } \mathcal{M}, t \models \neg P \text{ kaikille } t, \text{ joille } sRt \\
&\mathcal{M}, s \not\models \mathbf{AX}\neg P, \text{ joss } \mathcal{M}, t \not\models \neg P \text{ jollekin } t, \text{ jolle } sRt \\
&\mathcal{M}, s \models \neg\mathbf{AX}\neg P, \text{ joss } \mathcal{M}, t \not\models \neg P \text{ jollekin } t, \text{ jolle } sRt \\
&\mathcal{M}, s \models \mathbf{EX}P, \text{ joss } \mathcal{M}, t \models P \text{ jollekin } t, \text{ jolle } sRt
\end{aligned}$$

Perusoperaattori

$\mathcal{M}, s \models \mathbf{A}(P\mathbf{U}Q)$, joss mallissa $\mathcal{M}$ kaikille täysille poluille $(s_0, s_1, \ldots)$, $s_0 = s$, on olemassa i siten, että $\mathcal{M}, s_i \models Q$, ja kaikille $j < i$ pätee $\mathcal{M}, s_j \models P$

Tehdään korvaukset $P \to \top$, $Q \to P$:

$\mathcal{M}, s \models \mathbf{A}(\top\mathbf{U}P)$, joss mallissa $\mathcal{M}$ kaikille täysille poluille $(s_0, s_1, \ldots)$, $s_0 = s$, on olemassa i siten, että $\mathcal{M}, s_i \models P$ ja kaikille $j < i$ pätee $\mathcal{M}, s_j \models \top$

$\mathcal{M}, s \models \mathbf{AF}P$, joss mallissa $\mathcal{M}$ kaikille täysille poluille $(s_0, s_1, \ldots)$, $s_0 = s$, on olemassa i siten, että $\mathcal{M}, s_i \models P$

Perusoperaattori

$\mathcal{M}, s \models \mathbf{E}(P\mathbf{U}Q)$, joss mallissa $\mathcal{M}$ on olemassa täysi polku $(s_0, s_1, \ldots)$, $s_0 = s$, ja on olemassa i siten, että $\mathcal{M}, s_i \models Q$ ja kaikille $j < i$ pätee $\mathcal{M}, s_j \models P$

Tehdään korvaukset $P \to \top$, $Q \to P$:

$\mathcal{M}, s \models \mathbf{E}(\top \mathbf{U} P)$, joss mallissa $\mathcal{M}$ on olemassa täysi polku $(s_0, s_1, \dots)$, $s_0 = s$, ja on olemassa i siten, että $\mathcal{M}, s_i \models P$ ja kaikille $j < i$ pätee $\mathcal{M}, s_j \models \top$
$\mathcal{M}, s \models \mathbf{EF}P$, joss mallissa $\mathcal{M}$ on olemassa täysi polku $(s_0, s_1, \dots)$, $s_0 = s$, ja on olemassa i siten, että $\mathcal{M}, s_i \models P$

$\mathcal{M}, s \models \mathbf{EF}P$, joss mallissa $\mathcal{M}$ on olemassa täysi polku $(s_0, s_1, \dots)$, $s_0 = s$, ja on olemassa i siten, että $\mathcal{M}, s_i \models P$
$\mathcal{M}, s \models \mathbf{EF}\neg P$, joss mallissa $\mathcal{M}$ on olemassa täysi polku $(s_0, s_1, \dots)$, $s_0 = s$, ja on olemassa i siten, että $\mathcal{M}, s_i \models \neg P$
$\mathcal{M}, s \not\models \mathbf{EF}\neg P$, joss mallissa $\mathcal{M}$ kaikille täysille poluille $(s_0, s_1, \dots)$, $s_0 = s$, ja kaikille i pätee $\mathcal{M}, s_i \not\models \neg P$
$\mathcal{M}, s \models \neg\mathbf{EF}\neg P$, joss mallissa $\mathcal{M}$ kaikille täysille poluille $(s_0, s_1, \dots)$, $s_0 = s$, ja kaikille i pätee $\mathcal{M}, s_i \not\models \neg P$
$\mathcal{M}, s \models \mathbf{AG}P$, joss mallissa $\mathcal{M}$ kaikille täysille poluille $(s_0, s_1, \dots)$, $s_0 = s$, ja kaikille i pätee $\mathcal{M}, s_i \models P$

$\mathcal{M}, s \models \mathbf{AF}P$, joss mallissa $\mathcal{M}$ kaikille täysille poluille $(s_0, s_1, \dots)$, $s_0 = s$, on olemassa i siten, että $\mathcal{M}, s_i \models P$
$\mathcal{M}, s \models \mathbf{AF}\neg P$, joss mallissa $\mathcal{M}$ kaikille täysille poluille $(s_0, s_1, \dots)$, $s_0 = s$, on olemassa i siten, että $\mathcal{M}, s_i \models \neg P$
$\mathcal{M}, s \not\models \mathbf{AF}\neg P$, joss mallissa $\mathcal{M}$ on olemassa täysi polku $(s_0, s_1, \dots)$, $s_0 = s$, siten, että kaikille i pätee $\mathcal{M}, s_i \not\models \neg P$
$\mathcal{M}, s \models \neg\mathbf{AF}\neg P$, joss mallissa $\mathcal{M}$ on olemassa täysi polku $(s_0, s_1, \dots)$, $s_0 = s$, siten, että kaikille i pätee $\mathcal{M}, s_i \not\models \neg P$
$\mathcal{M}, s \models \mathbf{EG}P$, joss mallissa $\mathcal{M}$ on olemassa täysi polku $(s_0, s_1, \dots)$, $s_0 = s$, siten, että kaikille i pätee $\mathcal{M}, s_i \models P$

2. a) $P \land \mathbf{EF}Q$
   b) $\mathbf{EF}(P \land \mathbf{AXAG}\neg P)$

c) $\mathbf{AG}\big(P \to \mathbf{AX}(P \to \mathbf{EF}Q)\big)$

d) $\big(P \to \mathbf{A}(P\mathbf{U}Q)\big) \wedge \big(\neg P \to \mathbf{AX}(P \vee \mathbf{AX}P)\big)$

e) $\mathbf{E}\big(P\mathbf{U}\mathbf{AG}((Q \to \mathbf{AX}\neg Q) \wedge (\neg Q \to \mathbf{AX}Q))\big)$

f) $\mathbf{AG}\big(P \to \mathbf{AG}(\neg Q \wedge \neg R)\big) \wedge \mathbf{AG}\big((Q \vee R) \to \mathbf{AG}\neg P\big)$

3. Määritellään esim.

$$\begin{array}{ll} v(s_0, P) = \text{true} & v(s_0, Q) = \text{false} \\ v(s_1, P) = \text{false} & v(s_1, Q) = \text{true} \\ v(s_2, P) = \text{false} & v(s_2, Q) = \text{false}, \end{array}$$

jolloin saadaan malli

$$\begin{tikzcd} \underset{P, \neg Q}{s_0} \arrow[r] & \underset{\neg P, Q}{s_1} \arrow[r] & \underset{\neg P, \neg Q}{s_2} \arrow[loop above] \end{tikzcd}$$

Nyt täydelle polulle $x = (s_0, s_1, s_2, s_2, s_2, \ldots)$ pätee

$$\mathcal{M}, x \models P\mathbf{U}Q, \text{ koska } \mathcal{M}, x^1 \models Q \text{ ja } \mathcal{M}, x^j \models P \text{ pätee kaikille } j < 1,$$

mutta $\mathcal{M}, x \not\models Q\mathbf{R}P$, koska $\mathcal{M}, x^1 \not\models P$, mutta ei ole olemassa sellaista $j < 1$, jolle pätisi $\mathcal{M}, x^j \models Q$.