

1. a)

- |  |  |  |
|--|--|--|
| <ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>\langle 1 \rangle \neg (\diamond(P \vee \diamond \square \square P) \rightarrow \diamond P)</math></li> <li>2. <math>\langle 1 \rangle \diamond(P \vee \diamond \square \square P)</math></li> <li>3. <math>\langle 1 \rangle \neg \diamond P</math></li> <li>4. <math>\langle 1, 2 \rangle P \vee \diamond \square \square P</math></li> <li>5. <math>\langle 1, 2 \rangle \neg P</math></li> <li>6. <math>\langle 1, 2 \rangle P</math> (4)</li> </ol> |  | <ol style="list-style-type: none"> <li>7. <math>\langle 1, 2 \rangle \diamond \square \square P</math> (4)</li> <li>8. <math>\langle 1, 2, 3 \rangle \square \square P</math> (7)</li> <li>9. <math>\langle 1, 2, 3 \rangle \square P</math> (8) (refleksiivisyys)</li> <li>10. <math>\langle 1, 2, 3 \rangle P</math> (9) (refleksiivisyys)</li> <li>11. <math>\langle 1, 2, 3 \rangle \neg P</math> (3) (transitiivisuus)</li> </ol> |
| $\otimes$  |  | $\otimes$  |

b)

1.  $\langle 1 \rangle \neg \diamond (\diamond P \rightarrow \square (\diamond P \vee P))$
  2.  $\langle 1 \rangle \neg (\diamond P \rightarrow \square (\diamond P \vee P))$  (1) (refleksiivisyys)
  3.  $\langle 1 \rangle \diamond P$  (2)
  4.  $\langle 1 \rangle \neg \square (\diamond P \vee P)$  (2)
  5.  $\langle 1, 2 \rangle \neg (\diamond P \vee P)$  (4)
  6.  $\langle 1, 2 \rangle \neg \diamond P$  (5)
  7.  $\langle 1, 2 \rangle \neg P$  (5)
  8.  $\langle 1, 2 \rangle \neg (\diamond P \rightarrow \square (\diamond P \vee P))$  (1)
  9.  $\langle 1, 2 \rangle \diamond P$  (8)
  10.  $\langle 1, 2 \rangle \neg \square (\diamond P \vee P)$  (8)
  11.  $\langle 1, 2, 3 \rangle P$  (9)
  12.  $\langle 1, 2, 3 \rangle \neg P$  (6)
- $\otimes$

c)

1.  $\langle 1 \rangle \neg \Box (\Box (\Box P \wedge Q) \rightarrow \Diamond \Box \Diamond \Diamond (P \vee Q))$
  2.  $\langle 1, 2 \rangle \neg (\Box (\Box P \wedge Q) \rightarrow \Diamond \Box \Diamond \Diamond (P \vee Q))$  (1)
  3.  $\langle 1, 2 \rangle \Box (\Box P \wedge Q)$  (2)
  4.  $\langle 1, 2 \rangle \neg \Diamond \Box \Diamond \Diamond (P \vee Q)$  (2)
  5.  $\langle 1 \rangle \Box P \wedge Q$  (3) (symmetrisyys)
  6.  $\langle 1 \rangle \Box P$  (5)
  7.  $\langle 1 \rangle Q$  (5)
  8.  $\langle 1 \rangle \neg \Box \Diamond \Diamond (P \vee Q)$  (4) (symmetrisyys)
  9.  $\langle 1, 3 \rangle \neg \Diamond \Diamond (P \vee Q)$  (8)
  10.  $\langle 1 \rangle \neg \Diamond (P \vee Q)$  (9) (symmetrisyys)
  11.  $\langle 1, 3 \rangle \neg (P \vee Q)$  (10)
  12.  $\langle 1, 3 \rangle \neg P$  (11)
  13.  $\langle 1, 3 \rangle \neg Q$  (11)
  14.  $\langle 1, 3 \rangle P$  (6)
- ⊗

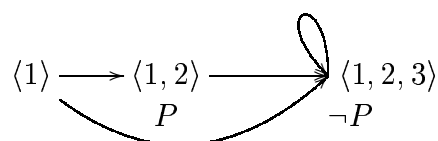
d)

1.  $\langle 1 \rangle \neg (\Box P \rightarrow \Diamond ((P \rightarrow \Box Q) \rightarrow Q))$
2.  $\langle 1 \rangle \Box P$  (1)
3.  $\langle 1 \rangle \neg \Diamond ((P \rightarrow \Box Q) \rightarrow Q)$  (1)
4.  $\langle 1, 2 \rangle P$  (2) (sarjallisuus)
5.  $\langle 1, 2 \rangle \neg ((P \rightarrow \Box Q) \rightarrow Q)$  (3)
6.  $\langle 1, 2 \rangle P \rightarrow \Box Q$  (5)
7.  $\langle 1, 2 \rangle \neg Q$  (5)
8.  $\langle 1, 2 \rangle \neg P$  (6) | 9.  $\langle 1, 2 \rangle \Box Q$  (6)
- ⊗ | 10.  $\langle 1, 2, 3 \rangle Q$  (9) (sarjallisuus)
- | 11.  $\langle 1, 2, 3 \rangle \neg ((P \rightarrow \Box Q) \rightarrow Q)$  (3) (transitiivisuus)
- | 12.  $\langle 1, 2, 3 \rangle P \rightarrow \Box Q$  (11)
- | 13.  $\langle 1, 2, 3 \rangle \neg Q$  (11)
- | ⊗



Systemaattiseen **K4**-tauluun muodostuu ääretön haara, joten taulua ei saada koskaan valmiiksi. Koska tämä ääretön haara ei ole suljettu, seuraa, että lause  $\Diamond P \rightarrow \Diamond \Box P$  ei ole **K4**-pätevä.

Huomataan, että lauseet  $\neg P$  ja  $\neg \Box P$  toistuvat taulussa prefikseillä  $\langle 1, 2, 3 \rangle$ ,  $\langle 1, 2, 3, 4 \rangle$  ja  $\langle 1, 2, 3, 4, 5 \rangle$ . Siten näitä prefiksejä vastaavissa vastamallin maailmoissa pätevät täsmälleen samat lauseet. Äärellinen vastamalli voidaan nyt yrittää muodostaa samastamalla kaikki nämä maailmat yhdeksi maailmaksi ja tarkistamalla, onko näin saatu malli lauseen **K4**-pätevyyden vastamalli. Kun tämä tehdään ja huolehditaan siitä, että transitiivisuusehto pysyy voimassa, saadaan malli



Nähdään, että lause  $\Diamond P$  toteutuu mallin maailmassa  $\langle 1 \rangle$ , mutta lause  $\Diamond \Box P$  ei toteudu tässä maailmassa. Siten malli on vastamalli tehtävän lauseen **K4**-pätevyydelle.

3.

1.	$\langle 1 \rangle \neg ((\Diamond P \rightarrow \Diamond \Diamond P) \wedge \neg P)$		
2.	$\langle 1 \rangle \neg (\Diamond P \rightarrow \Diamond \Diamond P)$	(1)	3.
6.	$\langle 1 \rangle \Diamond P$	(2)	4.
7.	$\langle 1 \rangle \neg \Diamond \Diamond P$	(2)	5.
8.	$\langle 1, 2 \rangle P$	(6)	$\otimes$
9.	$\langle 1, 2 \rangle \neg \Diamond P$	(7)	
10.	$\langle 1, 2 \rangle \Box \neg P \rightarrow \neg P$	(GP)	
11.	$\langle 1, 2 \rangle \neg \Box \neg P$	(10)	12.
13.	$\langle 1, 2, 3 \rangle \neg \neg P$	(11)	$\otimes$
14.	$\langle 1, 2, 3 \rangle P$	(12)	
15.	$\langle 1, 2, 3 \rangle \neg P$	(9)	