

**T-79.146**

**Kevät 2004**

**Logiikka tietotekniikassa: erityiskysymyksiä I**

**Laskuharjoitus 6**

**Ratkaisut**

Aksioomat ja päätelysäännöt Hilbert-tyylisiä todistuksia varten:

$$K: \square(P \rightarrow Q) \rightarrow (\square P \rightarrow \square Q)$$

$$T: \square P \rightarrow P$$

$$D: \square P \rightarrow \diamond P \quad \text{tai} \quad \square P \rightarrow \neg \square \neg P$$

$$4: \square P \rightarrow \square \square P$$

$$5: \neg \square P \rightarrow \square \neg \square P$$

$$MP: \frac{P, P \rightarrow Q}{Q}$$

$$N: \frac{P}{\square P}$$

1. a)

1.  $\neg \square P \rightarrow \square \neg \square P$  [5-aksiooma]
2.  $(\neg \square P \rightarrow \square \neg \square P) \rightarrow (\neg \square \neg \square P \rightarrow \square P)$  [Tautologia]
3.  $\neg \square \neg \square P \rightarrow \square P$  [MP, 1, 2]
4.  $\square \square P$  [GP]
5.  $\square \square P \rightarrow \neg \square \neg \square P$  [D]
6.  $\neg \square \neg \square P$  [MP, 4, 5]
7.  $\square P$  [MP, 6, 3]

b) S4 on KT4.

1.  $\neg \perp$  [Tautologia]
2.  $\square \perp \rightarrow \perp$  [T]
3.  $(\square \perp \rightarrow \perp) \rightarrow (\neg \perp \rightarrow \neg \square \perp)$  [Tautologia]
4.  $\neg \perp \rightarrow \neg \square \perp$  [MP, 2, 3]
5.  $\neg \square \perp$  [MP, 1, 4]

2. a)

1.  $\langle 1 \rangle \neg (\square P \rightarrow \square(Q \rightarrow P))$
2.  $\langle 1 \rangle \square P$  (1)
3.  $\langle 1 \rangle \neg \square(Q \rightarrow P)$  (1)
4.  $\langle 1, 2 \rangle \neg(Q \rightarrow P)$  (3)
5.  $\langle 1, 2 \rangle Q$  (4)
6.  $\langle 1, 2 \rangle \neg P$  (4)
7.  $\langle 1, 2 \rangle P$  (2)  
 $\otimes$

b)

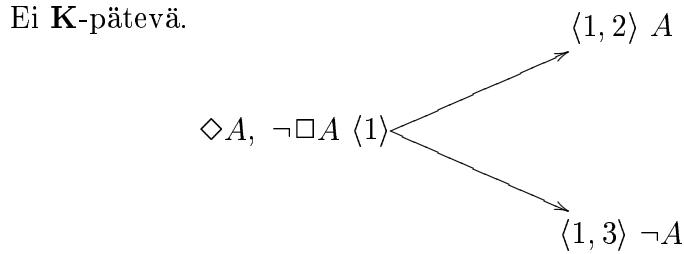
1.  $\langle 1 \rangle \neg (\square(P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg \square \neg P \rightarrow \neg \square \neg Q))$
2.  $\langle 1 \rangle \square(P \rightarrow Q)$  (1)
3.  $\langle 1 \rangle \neg(\neg \square \neg P \rightarrow \neg \square \neg Q)$  (1)
4.  $\langle 1 \rangle \neg \square \neg P$  (3)
5.  $\langle 1 \rangle \neg \neg \square \neg Q$  (3)
6.  $\langle 1 \rangle \square \neg Q$  (5)
7.  $\langle 1, 2 \rangle \neg \neg P$  (4)
8.  $\langle 1, 2 \rangle P$  (7)
9.  $\langle 1, 2 \rangle \neg Q$  (6)
10.  $\langle 1, 2 \rangle P \rightarrow Q$  (2)
11.  $\langle 1, 2 \rangle \neg P$  (10) | 12.  $\langle 1, 2 \rangle Q$  (10)  
 $\otimes$        $\otimes$

c)

1.  $\langle 1 \rangle \neg ((\square P \wedge \square Q) \rightarrow \square(P \wedge Q))$
2.  $\langle 1 \rangle \square P \wedge \square Q$  (1)
3.  $\langle 1 \rangle \neg \square(P \wedge Q)$  (1)
4.  $\langle 1 \rangle \square P$  (2)
5.  $\langle 1 \rangle \square Q$  (2)
6.  $\langle 1, 2 \rangle \neg(P \wedge Q)$  (3)
7.  $\langle 1, 2 \rangle P$  (4)
8.  $\langle 1, 2 \rangle Q$  (5)
9.  $\langle 1, 2 \rangle \neg P$  (6) | 10.  $\langle 1, 2 \rangle \neg Q$  (6)  
 $\otimes$        $\otimes$

3. a)

1.  $\langle 1 \rangle \neg(\diamond A \rightarrow \square A)$
2.  $\langle 1 \rangle \diamond A$  (1)
3.  $\langle 1 \rangle \neg \square A$  (1)
4.  $\langle 1, 2 \rangle \neg \neg A$  (2;  $\diamond$  on lyhennysmerkintä  $\neg \square \neg$ :lle)
5.  $\langle 1, 2 \rangle A$  (4)
6.  $\langle 1, 3 \rangle \neg A$  (3)



b)

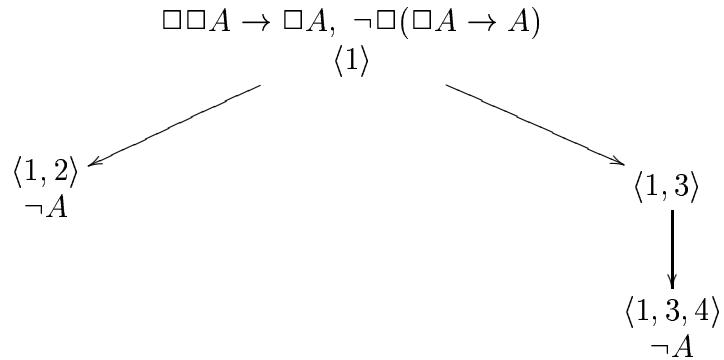
1.  $\langle 1 \rangle \neg(\diamond \square A \vee \square \diamond \neg A)$
  2.  $\langle 1 \rangle \neg \diamond \square A$  (1)
  3.  $\langle 1 \rangle \neg \square \diamond \neg A$  (1)
  4.  $\langle 1 \rangle \square \neg \square A$  (2)
  5.  $\langle 1, 2 \rangle \neg \diamond \neg A$  (3)
  6.  $\langle 1, 2 \rangle \neg \square A$  (4)
  7.  $\langle 1, 2 \rangle \square \neg \neg A$  (5)
  8.  $\langle 1, 2, 3 \rangle \neg A$  (6)
  9.  $\langle 1, 2, 3 \rangle \neg \neg A$  (7)
- $\otimes$

Lause on **K**-pätevä.

c)

1.  $\langle 1 \rangle \neg((\square \square A \rightarrow \square A) \rightarrow \square(\square A \rightarrow A))$
2.  $\langle 1 \rangle \square \square A \rightarrow \square A$  (1)
3.  $\langle 1 \rangle \neg \square(\square A \rightarrow A)$  (1)
4.  $\langle 1, 2 \rangle \neg(\square A \rightarrow A)$  (3)
5.  $\langle 1, 2 \rangle \square A$  (4)
6.  $\langle 1, 2 \rangle \neg A$  (4)
7.  $\langle 1 \rangle \neg \square \square A$  (2) | 8.  $\langle 1 \rangle \square A$  (2)
9.  $\langle 1, 3 \rangle \neg \square A$  (7) | 11.  $\langle 1, 2 \rangle A$  (8)
10.  $\langle 1, 3, 4 \rangle \neg A$  (9) |  $\otimes$

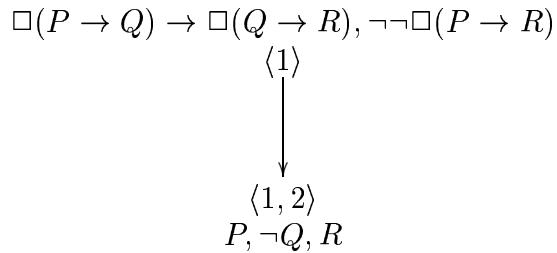
Ei **K**-pätevä.



4. a)

- |     |  |     |
|-----|--|-----|
| 1.  | $\langle 1 \rangle \neg (\square(P \rightarrow Q) \rightarrow \square(Q \rightarrow R)) \rightarrow \neg \square(P \rightarrow R)$ |     |
| 2.  | $\langle 1 \rangle \square(P \rightarrow Q) \rightarrow \square(Q \rightarrow R)$  | (1) |
| 3.  | $\langle 1 \rangle \neg \neg \square(P \rightarrow R)$   | (1) |
| 4.  | $\langle 1 \rangle \square(P \rightarrow R)$   | (3) |
| 5.  | $\langle 1 \rangle \neg \square(P \rightarrow Q)$  | (2) |
| 7.  | $\langle 1, 2 \rangle \neg(P \rightarrow Q)$   | (5) |
| 8.  | $\langle 1, 2 \rangle P$   | (7) |
| 9.  | $\langle 1, 2 \rangle \neg Q$  | (7) |
| 10. | $\langle 1, 2 \rangle P \rightarrow R$   | (4) |
| 11. | $\langle 1, 2 \rangle \neg P \quad (10) \mid 12. \quad \langle 1, 2 \rangle R \quad (10)$  |     |
|     | $\otimes$  |     |

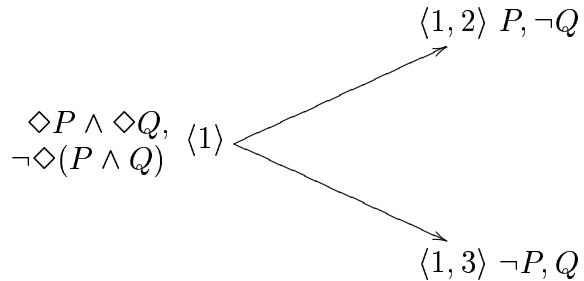
Ei K-pätevä.



b)

1.  $\langle 1 \rangle \neg ((\diamond P \wedge \diamond Q) \rightarrow \diamond(P \wedge Q))$
  2.  $\langle 1 \rangle \diamond P \wedge \diamond Q$  (1)
  3.  $\langle 1 \rangle \neg \diamond(P \wedge Q)$  (1)
  4.  $\langle 1 \rangle \diamond P$  (2)
  5.  $\langle 1 \rangle \diamond Q$  (2)
  6.  $\langle 1 \rangle \square \neg(P \wedge Q)$  (3)
  7.  $\langle 1, 2 \rangle P$  (4)
  8.  $\langle 1, 2 \rangle \neg(P \wedge Q)$  (6)
  9.  $\langle 1, 2 \rangle \neg P$  (8)
  10.  $\langle 1, 2 \rangle \neg Q$  (8)
  11.  $\langle 1, 3 \rangle Q$  (5)
  12.  $\langle 1, 3 \rangle \neg(P \wedge Q)$  (6)
  13.  $\langle 1, 3 \rangle \neg P$  (11)
  13.  $\langle 1, 3 \rangle \neg Q$  (12)
- $\otimes$

Ei **K**-pätevä.



c)

1.  $\langle 1 \rangle \neg (\square(P \wedge Q) \rightarrow (\square P \wedge \square Q))$
  2.  $\langle 1 \rangle \square(P \wedge Q)$  (1)
  3.  $\langle 1 \rangle \neg(\square P \wedge \square Q)$  (1)
  4.  $\langle 1 \rangle \neg \square P$  (3)
  5.  $\langle 1 \rangle \neg \square Q$  (3)
  6.  $\langle 1, 2 \rangle \neg P$  (4)
  7.  $\langle 1, 2 \rangle P \wedge Q$  (2)
  8.  $\langle 1, 2 \rangle P$  (7)
  9.  $\langle 1, 2 \rangle Q$  (7)
- $\otimes$
- $\otimes$
10.  $\langle 1, 2 \rangle \neg Q$  (5)
  11.  $\langle 1, 2 \rangle P \wedge Q$  (2)
  12.  $\langle 1, 2 \rangle P$  (11)
  13.  $\langle 1, 2 \rangle Q$  (11)