

Logiikka tietotekniikassa: erityiskysymyksiä I
 Laskuharjoitus 5
 Ratkaisut

Aksiooma K :

$$K: \quad \Box(P \rightarrow Q) \rightarrow (\Box P \rightarrow \Box Q)$$

Päätelysäännöt:

$$\text{MP: } \frac{P, P \rightarrow Q}{Q}$$

$$\text{N: } \frac{P}{\Box P}$$

1. a)

- | | |
|---|--------------|
| 1. $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$ | [Tautologia] |
| 2. $\Box(P \rightarrow (Q \rightarrow P))$ | [N, 1] |
| 3. $\Box(P \rightarrow (Q \rightarrow P)) \rightarrow (\Box P \rightarrow \Box(Q \rightarrow P))$ | [K] |
| 4. $\Box P \rightarrow \Box(Q \rightarrow P)$ | [MP, 2, 3] |

b)

- | | |
|---|--------------|
| 1. $\Box(P \rightarrow Q)$ | [GP] |
| 2. $(P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$ | [Tautologia] |
| 3. $\Box((P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P))$ | [N, 2] |
| 4. $\Box((P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)) \rightarrow$
$\quad (\Box(P \rightarrow Q) \rightarrow \Box(\neg Q \rightarrow \neg P))$ | [K] |
| 5. $\Box(P \rightarrow Q) \rightarrow \Box(\neg Q \rightarrow \neg P)$ | [MP, 3, 4] |
| 6. $\Box(\neg Q \rightarrow \neg P)$ | [MP, 1, 5] |
| 7. $\Box(\neg Q \rightarrow \neg P) \rightarrow (\Box \neg Q \rightarrow \Box \neg P)$ | [K] |
| 8. $\Box \neg Q \rightarrow \Box \neg P$ | [MP, 6, 7] |

2. Tämä tehtävä käsitellään seuraavissa laskuharjoituksissa.

3. a)

1.	$P \rightarrow Q$	[GP]
2.	$\neg Q \rightarrow P$	[GP]
3.	$(P \rightarrow Q) \rightarrow ((\neg Q \rightarrow P) \rightarrow Q)$	[Tautologia]
4.	$(\neg Q \rightarrow P) \rightarrow Q$	[MP, 1, 3]
5.	Q	[MP, 2, 4]
6.	$\Box Q$	[N, 5]
7.	$\neg Q \vee S$	[LP]
8.	$(\neg Q \vee S) \rightarrow (Q \rightarrow S)$	[Tautologia]
9.	$Q \rightarrow S$	[MP, 7, 8]
10.	S	[MP, 5, 9]
11.	$\Box Q \rightarrow (S \rightarrow \Box Q \wedge S)$	[Tautologia]
12.	$S \rightarrow \Box Q \wedge S$	[MP, 6, 11]
13.	$\Box Q \wedge S$	[MP, 10, 12]

b)

1.	$Q \rightarrow \neg P$	[GP]
2.	$\Box(Q \rightarrow \neg P)$	[N, 1]
3.	$\Box(Q \rightarrow \neg P) \rightarrow (\Box Q \rightarrow \Box \neg P)$	[K]
4.	$\Box Q \rightarrow \Box \neg P$	[MP, 2, 3]
5.	$\Diamond Q \rightarrow \Box Q$	[GP]
6.	$(\Diamond Q \rightarrow \Box Q) \rightarrow$ $((\Box Q \rightarrow \Box \neg P) \rightarrow (\Diamond Q \rightarrow \Box \neg P))$	[Tautologia]
7.	$(\Box Q \rightarrow \Box \neg P) \rightarrow (\Diamond Q \rightarrow \Box \neg P)$	[MP, 5, 6]
8.	$\Diamond Q \rightarrow \Box \neg P$	[MP, 4, 7]
9.	$(\neg \Box \neg Q \rightarrow \Box \neg P) \rightarrow (\neg \Box \neg P \rightarrow \Box \neg Q)$	[Tautologia]
10.	$\neg \Box \neg P \rightarrow \Box \neg Q$	[MP, 8, 9]
11.	$\Diamond P$	[LP]
12.	$\Box \neg Q$	[MP, 10, 11]

4. a) Huomataan, että

$$\Sigma \vdash \emptyset \implies \neg(\top \wedge A \wedge B \wedge \neg(A \wedge B)),$$

$$\Sigma \vdash \emptyset \implies \neg(\top \wedge \neg A \wedge (A \wedge B))$$

ja

$$\Sigma \vdash \emptyset \implies \neg(\top \wedge \neg B \wedge (A \wedge B)),$$

koska lauseet $\neg(\top \wedge A \wedge B \wedge \neg(A \wedge B))$, $\neg(\top \wedge \neg A \wedge (A \wedge B))$ ja $\neg(\top \wedge \neg B \wedge (A \wedge B))$ ovat tautologioita. Siten lausejoukot $\{A, B, \neg(A \wedge B)\}$, $\{\neg A, (A \wedge B)\}$ ja $\{\neg B, (A \wedge B)\}$ ovat Σ -epäkonsistentteja.

Tarkastellaan Σ -maksimaalista lausejoukkoa Δ .

Oletetaan, että $A \in \Delta$ ja $B \in \Delta$, mutta $A \wedge B \notin \Delta$. Koska Δ on Σ -maksimaalinen, seuraa, että $\neg(A \wedge B) \in \Delta$. Nyt kuitenkin Δ :lla olisi Σ -epäkonsistentti osajoukko $\{A, B, \neg(A \wedge B)\}$, mikä on mahdotonta, koska Δ on Σ -konsistentti (jolloin myös sen kaikki osajoukot ovat Σ -konsistentteja). On siis oltava myös $A \wedge B \in \Delta$.

Jos taas olisi $A \wedge B \in \Delta$ ja $A \notin \Delta$ tai $B \notin \Delta$, niin silloin Δ :n Σ -maksimaalisuudesta seuraisi $\neg A \in \Delta$ tai $\neg B \in \Delta$, ja Δ :lla olisi Σ -epäkonsistentti osajoukko $\{\neg A, A \wedge B\}$ tai $\{\neg B, A \wedge B\}$, mikä on jälleen mahdotonta, koska Δ on Σ -konsistentti. On siis oltava $A \in \Delta$ ja $B \in \Delta$.

Yllä olevan perusteella todetaan, että $A \wedge B \in \Delta$ pätee, jos ja vain, jos sekä $A \in \Delta$ että $B \in \Delta$ ovat voimassa.

b) Todetaan, että

$$\begin{aligned}\Sigma \vdash \emptyset &\implies \neg(\top \wedge \neg A \wedge \neg(A \rightarrow B)), \\ \Sigma \vdash \emptyset &\implies \neg(\top \wedge B \wedge \neg(A \rightarrow B)),\end{aligned}$$

ja

$$\Sigma \vdash \emptyset \implies \neg(\top \wedge A \wedge \neg B \wedge (A \rightarrow B)),$$

koska nuolien oikealla puolella olevat lauseet ovat tautologioita. Seuraa siis, että lausejoukot $\{\neg A, \neg(A \rightarrow B)\}$, $\{B, \neg(A \rightarrow B)\}$ ja $\{A, \neg B, A \rightarrow B\}$ ovat Σ -epäkonsistentteja. Nyt tulos

$$A \rightarrow B \in \Delta \text{ joss } A \notin \Delta \text{ tai } B \in \Delta$$

voidaan todistaa vastaavalla tavalla kuin a-kohdassa.

c) Vastaavasti

$$\begin{aligned}\Sigma \vdash \emptyset &\implies \neg(\top \wedge A \wedge \neg(A \vee B)), \\ \Sigma \vdash \emptyset &\implies \neg(\top \wedge B \wedge \neg(A \vee B)),\end{aligned}$$

ja

$$\Sigma \vdash \emptyset \implies \neg(\top \wedge \neg A \wedge \neg B \wedge (A \vee B))$$

ja $A \vee B \in \Delta$, jos ja vain, jos $A \in \Delta$ tai $B \in \Delta$.