**T-79.146** **Kevät 2004**
**Logiikka tietotekniikassa: erityiskysymyksiä I**
**Laskuharjoitus 3**
**Ratkaisut**

1. a) $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$, $S = \{s, t\}$, $R = \{\langle s, s\rangle, \langle s, t\rangle\}$, $v(s, A) = \text{true}$, $v(t, A) = \text{false}$.

$$\begin{tikzcd} s \arrow[loop left] \arrow[r] & t \\ A & \neg A \end{tikzcd}$$

$\mathcal{M}, s \Vdash \Diamond A$ pätee, koska $\langle s, s\rangle \in R$ ja $\mathcal{M}, s \Vdash A$. $\mathcal{M}, s \Vdash \Box A$ ei kuitenkaan päde, koska $\langle s, t\rangle \in R$ ja $\mathcal{M}, t \nVdash A$. Siis $\mathcal{M}, s \nVdash \Diamond A \to \Box A$.

b) $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$, $S = \{s, t\}$, $R = \{\langle s, t\rangle\}$, $v(s, A) = v(t, A) = \text{false}$.

$$\neg A \; s \longrightarrow t \; \neg A$$

Koska $\langle s, t\rangle \in R$ ja $\mathcal{M}, t \nVdash A$, $\mathcal{M}, s \nVdash \Box A$. Siten $\mathcal{M}, s \Vdash \neg\Box A$ pätee. Koska maailmalla $t$ ei ole seuraajia relaatiossa $R$, $\mathcal{M}, t \Vdash \Box A$ pätee. Tällöin $\mathcal{M}, t \nVdash \neg\Box A$, mistä seuraa, että $\mathcal{M}, s \nVdash \Box\neg\Box A$ (koska $\langle s, t\rangle \in R$). Siis $\mathcal{M}, s \nVdash \neg\Box A \to \Box\neg\Box A$.

c) $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$, $S = \{s, t, u\}$, $R = \{\langle s, t\rangle, \langle s, u\rangle, \langle t, t\rangle\}$, $v(s, A) = v(u, A) = \text{false}$ ja $v(t, A) = \text{true}$.

$$\begin{tikzcd} & \neg A & \\ & s \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ A & & \neg A \\ t \arrow[loop left] & & u \end{tikzcd}$$

$\mathcal{M}, t \Vdash \Diamond A$, koska $\langle t, t\rangle \in R$ ja $\mathcal{M}, t \Vdash A$. Koska $t$ on itsensä ainoa seuraaja $R$-relaatiossa, myös $\mathcal{M}, t \Vdash \Box A$ pätee. Siten $\mathcal{M}, t \Vdash \Diamond A \wedge \Box A$ pätee, mistä seuraa, että $\mathcal{M}, s \Vdash \Diamond(\Diamond A \wedge \Box A)$ pätee (koska $\langle s, t\rangle \in R$). Koska $u$:lla ei ole $R$-relaatiossa seuraajia, $\mathcal{M}, u \nVdash \Diamond A$. Koska $\langle s, u\rangle \in R$, seuraa tästä, että $\mathcal{M}, s \nVdash \Box\Diamond A$. Siten $\mathcal{M}, s \nVdash \Diamond(\Diamond A \wedge \Box A) \to \Box\Diamond A$.

d) $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$, $S = \{s, t\}$, $R = \{\langle s, s\rangle, \langle s, t\rangle\}$, $v(s, A) = v(t, B) = \text{true}$, $v(s, B) = v(t, A) = \text{false}$.

$$\begin{tikzcd}[row sep=tiny] s \arrow[loop left] \arrow[rr] & & t \\ A, \neg B & & \neg A, B \end{tikzcd}$$

$\mathcal{M}, s \Vdash \Diamond A$ pätee, koska $\langle s, s\rangle \in R$ ja $\mathcal{M}, s \Vdash A$ pätee. Myös $\mathcal{M}, s \Vdash \Diamond B$ on voimassa, koska $\langle s, t\rangle \in R$ ja $\mathcal{M}, t \Vdash B$. Siten $\mathcal{M}, s \Vdash \Diamond A \wedge \Diamond B$. $\mathcal{M}, s \Vdash \Diamond(A \wedge B)$ ei kuitenkaan päde, sillä $s$:llä ei ole olemassa sellaista seuraajaa $s'$ $R$-relaatiossa, jolle pätisi $\mathcal{M}, s' \Vdash A \wedge B$. Siis $\mathcal{M}, s \nVdash (\Diamond A \wedge \Diamond B) \to \Diamond(A \wedge B)$.

2. Olkoon $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$.

   ($\Rightarrow$) Oletetaan, että $\Diamond\top$ on pätevä mallissa. Olkoon $s \in S$ mikä tahansa mallin maailma. Oletuksen perusteella $\mathcal{M}, s \Vdash \Diamond\top$ pätee, mistä seuraa, että on olemassa $t \in S$ siten, että $\langle s, t\rangle \in R$ ja $\mathcal{M}, t \Vdash \top$. Edelleen päätellään, että

   $$\text{jos} \quad \mathcal{M}, s \Vdash \Box A, \quad \text{niin silloin välttämättä myös} \quad \mathcal{M}, t \Vdash A,$$

   $s$:n seuraajalle $t$, ja siksi

   $$\mathcal{M}, s \Vdash \Diamond A.$$

   Siis jos $\mathcal{M}, s \Vdash \Box A$, niin silloin myös $\mathcal{M}, s \Vdash \Diamond A$. Siten $\mathcal{M}, s \Vdash \Box A \to \Diamond A$, eli myös $\Box A \to \Diamond A$ on pätevä mallissa.

   ($\Leftarrow$) Oletetaan, että $\Box A \to \Diamond A$ on pätevä mallissa. Olkoon $s \in S$. Osoitetaan, että nyt on välttämättä olemassa $t \in S$ siten, että $\langle s, t\rangle \in R$. Jos näin ei olisi, $s$:llä ei olisi $R$-relaatiossa yhtään seuraajaa, jolloin $\mathcal{M}, s \Vdash \Box A$ olisi voimassa. Koska $\Box A \to \Diamond A$ on oletuksen mukaan pätevä mallissa, olisi nyt välttämättä oltava myös $\mathcal{M}, s \Vdash \Diamond A$, mistä seuraa ristiriita.

   On siis olemassa $t \in S$ siten, että $\langle s, t\rangle \in R$. Siten $\mathcal{M}, t \Vdash \top$, jolloin myös $\mathcal{M}, s \Vdash \Diamond\top$ pätee. Seuraa, että $\Diamond\top$ on pätevä mallissa.

3. Todistetaan induktiolla $\phi$:n rakenteen suhteen.

   Rakenteinen induktio lauseille on seuraavanlainen.
   Perustapaus: Osoitetaan, että kaikilla atomilauseilla on tutkittava ominaisuus.
   Induktio-oletus: Oletetaan, että lauseilla $\psi_1$ ja $\psi_2$ on tutkittava ominaisuus.
   Induktioaskel: Osoitetaan, että kaikille konnektiiveille $\oplus$ lauseella $\psi_1 \oplus \psi_2$ on tutkittava ominaisuus.
   Tällöin kaikilla lauseilla $\phi$ on ominaisuus.

   **Perustapaus.**

Olkoon $\phi$ atomilause $p_i$. Tällöin pätee $M', s \models p_i$ joss $v'(s, p_i) = true$ joss (generoidun alimallin määritelmän nojalla) $v(s, p_i) = true$ joss $M, s \models p_i$. Näin alkuperäisen väittämän ekvivalenssi pysyy voimassa.

Toisaalta, olkoon $\phi$ muotoa $\top$ tai $\bot$. Modaalilogiikan semantiikan toteutuvuusrelaation määritelmän nojalla sekä $M, s \models \top$ joss $M', s \models \top$ että $M, s \not\models \bot$ joss $M', s \not\models \bot$ pätevät.

**Induktio oletus.**

Päteköön väittämä lauseille $\psi_1$ ja $\psi_2$.

**Induktioaskel.**

Osoitetaan, että väittämä pätee lauseista $\psi_1$ ja $\psi_2$ rakennetuille lauseille. Tapausanalyysi eri konnektiivien suhteen:

- Olkoon lause $\phi$ muotoa $\neg\psi_1$ tai $\psi_1 \wedge \psi_2$.
  Huomioidaan, että generoidun alimallin määritelmän nojalla kaikki $S'$:n tilat toteuttavat lauselogiikan lauseet samalla tavalla kuin $S$:n tilat. Tällöin ekvivalenssi pysyy voimassa kyseistä muotoa oleville lauseille.
  Esimerkiksi seuraava ekvivalenssi pätee: $\mathcal{M}, s \models \neg\psi_1$ joss $\mathcal{M}, s \not\models \psi_1$ joss $\mathcal{M}', s \not\models \psi_1$ joss $\mathcal{M}', s \models \neg\psi_1$.
- Olkoon $\phi$ muotoa $\Box\psi_1$.
  ($\Rightarrow$)
  Oletetaan, että $\mathcal{M}', s \not\models \Box\psi_1$. Tällöin on olemassa maailma $t \in S'$ s.e. $(s, t) \in R'$ ja $\mathcal{M}', t \not\models \psi_1$.
  Generoidun alimallin määritelmän nojalla $t \in S$ ja $(s, t) \in R$. Induktio oletuksen perusteella $\mathcal{M}, t \not\models \psi_1$. Tästä seuraa, että $\mathcal{M}, s \not\models \Box\psi_1$.
  ($\Leftarrow$)
  Samaan tapaan.

4. Käytetään tehtävässä hyväksi generoiduille alimalleille[1] voimassa olevaa tulosta:

[1] Olkoon annettu malli $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$. Joukon $S_0 \subseteq S$ *generoima alimalli* $\mathcal{M}' = \langle S', R', v'\rangle$ on malli, joka toteuttaa seuraavat ehdot:

1. $S'$ on pienin $S$:n osajoukko, joka toteuttaa ehdot
   - $S_0 \subseteq S'$.
   - $S'$ on $R$-suljettu: jos on olemassa maailmat $s \in S'$ ja $t \in S$ siten, että $\langle s, t\rangle \in R$, niin silloin on oltava myös $t \in S'$.
2. $R' = (S' \times S') \cap R$.
3. Kaikille atomilauseille $P$ ja kaikille maailmoille $s \in S'$: $v'(s, P) = v(s, P)$.

Jos $\mathcal{M}' = \langle S', R', v' \rangle$ on mallin $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$ maailmojen joukon $S_0 \subseteq S$ generoima alimalli, niin silloin kaikille lauseille $P$ ja kaikille maailmoille $s \in S'$ pätee

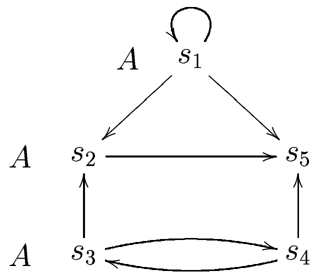
$$\mathcal{M}, s \Vdash P \quad \text{joss} \quad \mathcal{M}', s \Vdash P.$$

Koska tehtävässä annettu lause

$$\Box((\Box\Box A \to \Diamond\Box A) \land \Diamond\Box(\Box A \to \Diamond A)) \to (\Diamond(\Diamond A \to \Box A) \to ((\Diamond A \land \Box\Diamond A) \lor \Diamond\Box\Box\neg A))$$

on tosi tehtävässä annetun mallin $\mathcal{M}$ maailmassa $s_4$, se on tosi myös missä tahansa $\mathcal{M}$:stä generoidussa alimallissa, joka sisältää maailman $s_4$.

Tehtävän malli $\mathcal{M}$:

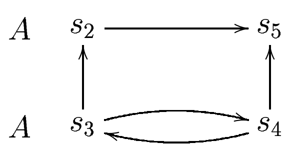



Muodostetaan maailmojen joukon $S_0 = \{s_4\}$ generoima alimalli $\mathcal{M}' = \langle S', R', v' \rangle$.

Koska $S_0 \subseteq S'$, niin $s_4 \in S'$. Koska nyt $s_3 \in S$, $s_5 \in S$ ja $\langle s_4, s_3 \rangle \in R$, $\langle s_4, s_5 \rangle \in R$, on oltava $s_3 \in S'$ ja $s_5 \in S'$, jotta $S'$ olisi $R$-suljettu. Edelleen, koska $s_2 \in S$ ja $\langle s_3, s_2 \rangle \in R$, on myös oltava $s_2 \in S'$. Koska maailma $s_1$ ei ole saavutettavissa maailmoista $s_2$, $s_3$, $s_4$ tai $s_5$ $R$-relaation kaarten välityksellä, maailmojen joukko $\{s_2, s_3, s_4, s_5\}$ on $R$-suljettu. Selvästi tämä joukko on myös pienin $S$:n $R$-suljettu osajoukko, joka sisältää maailman $s_3$. Generoidun alimallin ehtojen täyttämiseksi voidaan siis määritellä

$$\begin{aligned} S' &= \{s_2, s_3, s_4, s_5\}, \\ R' &= \{\langle s_2, s_5 \rangle, \langle s_3, s_2 \rangle, \langle s_3, s_4 \rangle, \langle s_4, s_3 \rangle, \langle s_4, s_5 \rangle\} \end{aligned}$$

ja $v'(s_2, A) = v'(s_3, A) = \text{true}$, $v'(s_4, A) = v'(s_5, A) = \text{false}$, jolloin malli $\mathcal{M}'$ on



Koska tehtävän lause toteutuu mallin $\mathcal{M}$ maailmassa $s_4$, se toteutuu myös mallin $\mathcal{M}'$ maailmassa $s_4$, koska $\mathcal{M}'$ on generoitu alimalli. Koska $\mathcal{M}'$ sisältää neljä mahdollista maailmaa, se on eräs tehtävän ratkaisu.

5. $\mathcal{F} = \langle S, R \rangle$:

$$\begin{tikzcd}
s_1 \arrow[r] & s_2 \arrow[d] \\
s_4 \arrow[u] & s_3 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

$\mathcal{F}' = \langle S', R' \rangle$, missä $S' = \{r_1, r_2\}$ ja $R' = \{\langle r_1, r_2 \rangle,\ \langle r_2, r_1 \rangle\}$:

$$\begin{tikzcd}
r_1 \arrow[d, bend left] \\
r_2 \arrow[u, bend left]
\end{tikzcd}$$

Muodostetaan kuvaus $f : S \to S'$:

$$f(s_1) = f(s_3) = r_1$$
$$f(s_2) = f(s_4) = r_2$$

Kuvaus $f$ on p-morfismi, koska

1. $f$ on surjektiivinen (esim. $r_1 = f(s_1)$ ja $r_2 = f(s_2)$)
2. $\forall s, t \in S$ : jos $sRt$ pätee, niin $f(s)R'f(t)$ pätee
(Esimerkiksi paria $\langle s_1, s_2 \rangle \in R$ vastaa pari $\langle f(s_1), f(s_2) \rangle = \langle r_1, r_2 \rangle$, joka kuuluu relaatioon $R'$; loput relaation $R$ parit voidaan tarkistaa vastaavasti.)
3. $\forall s \in S\ \forall t \in S'$ : jos $f(s)R't$ pätee, niin on olemassa $u \in S$ siten, että $sRu$ ja $f(u) = t$ pätee
(Esimerkiksi $\langle r_2, r_1 \rangle = \langle f(s_4), r_1 \rangle \in R'$, ja havaitaan, että $s_1 \in S$, $s_4Rs_1$ ja $f(s_1) = r_1$; loput tapaukset vastaavasti.)

P-morfismeja koskevan proposition perusteella seuraa, että

$$\text{jos } \mathcal{F} \models P, \quad \text{niin} \quad \mathcal{F}' \models P$$

kaikille lauseille $P$.