

1. Aloitetaan lauseen negaatiosta

$$\neg \left(\left(Q \vee (P \wedge \mathbf{AXA}(PUQ)) \right) \rightarrow \mathbf{A}(PUQ) \right).$$

Muunnetaan lause positiiviseen normaalimuotoon:

$$\begin{aligned} & \left(Q \vee (P \wedge \mathbf{AXA}(PUQ)) \right) \wedge \neg \mathbf{A}(PUQ) \\ & \left(Q \vee (P \wedge \mathbf{AXA}(PUQ)) \right) \wedge \mathbf{E}(\neg PBQ) \end{aligned}$$

Muodostetaan taulu. Aloitetaan OR-solmusta

$$D_0 = \left\{ \left(Q \vee (P \wedge \mathbf{AXA}(PUQ)) \right) \wedge \mathbf{E}(\neg PBQ) \right\},$$

jonka AND-seuraajat ovat

$$\begin{aligned} C_0 = & \left\{ \left(Q \vee (P \wedge \mathbf{AXA}(PUQ)) \right) \wedge \mathbf{E}(\neg PBQ), \right. \\ & Q \vee (P \wedge \mathbf{AXA}(PUQ)), \mathbf{E}(\neg PBQ), \\ & \left. Q, \neg Q, \neg P \vee \mathbf{EXE}(\neg PBQ), \neg P \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_1 = & \left\{ \left(Q \vee (P \wedge \mathbf{AXA}(PUQ)) \right) \wedge \mathbf{E}(\neg PBQ), \right. \\ & Q \vee (P \wedge \mathbf{AXA}(PUQ)), \mathbf{E}(\neg PBQ), \\ & \left. Q, \neg Q, \neg P \vee \mathbf{EXE}(\neg PBQ), \mathbf{EXE}(\neg PBQ) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_2 = & \left\{ \left(Q \vee (P \wedge \mathbf{AXA}(PUQ)) \right) \wedge \mathbf{E}(\neg PBQ), \right. \\ & Q \vee (P \wedge \mathbf{AXA}(PUQ)), \mathbf{E}(\neg PBQ), \\ & P \wedge \mathbf{AXA}(PUQ), P, \mathbf{AXA}(PUQ), \neg Q, \\ & \left. \neg P \vee \mathbf{EXE}(\neg PBQ), \neg P \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_3 = & \left\{ \left(Q \vee (P \wedge \mathbf{AXA}(PUQ)) \right) \wedge \mathbf{E}(\neg PBQ), \right. \\ & Q \vee (P \wedge \mathbf{AXA}(PUQ)), \mathbf{E}(\neg PBQ), \\ & P \wedge \mathbf{AXA}(PUQ), P, \mathbf{AXA}(PUQ), \neg Q, \\ & \left. \neg P \vee \mathbf{EXE}(\neg PBQ), \mathbf{EXE}(\neg PBQ) \right\} \end{aligned}$$

Solmut C_0 , C_1 ja C_2 voidaan karsia pois, koska ne sisältävät jonkin lauseen ja sen negaation. (Ristiriitaisten AND-solmujen karsintasääntöjä voidaan siis työmäärän vähentämiseksi soveltaa jo AND-solmuja muodostettaessa; voidaan osoittaa, että millään solmulla, joka saataisiin edelleen generoimalla täydellisesti kaikki solmujen C_0 , C_1 tai C_2 OR-seuraajat, näiden AND-seuraajat jne., ei ole merkitystä tutkittavana olevan lauseen toteutuvuustarkistuksen kannalta lopullisessa taulussa. Tämä johtuu siitä, että mikään näin syntyvistä solmuista ei sisällä tutkittavana olevaa lausetta, eikä mikään jostakin muusta AND-solmusta lähtevä tulevaisuuspolku voi kulkea ristiriitaisen AND-solmun kautta.)

Koska solmu C_3 sisältää lauseet $\mathbf{AXA}(PUQ)$ ja $\mathbf{EXE}(\neg PBQ)$, solmulle C_3 saadaan OR-seuraaja $D_1 = \{\mathbf{A}(PUQ), \mathbf{E}(\neg PBQ)\}$.

D_1 :n AND-seuraajat:

$$\begin{aligned} C_4 &= D_1 \cup \{Q, \neg Q, \neg P \vee \mathbf{EXE}(\neg PBQ), \neg P\} \\ C_5 &= D_1 \cup \{Q, \neg Q, \neg P \vee \mathbf{EXE}(\neg PBQ), \mathbf{EXE}(\neg PBQ)\} \\ C_6 &= D_1 \cup \{P \wedge \mathbf{AXA}(PUQ), P, \mathbf{AXA}(PUQ), \neg Q, \\ &\quad \neg P \vee \mathbf{EXE}(\neg PBQ), \neg P\} \\ C_7 &= D_1 \cup \{P \wedge \mathbf{AXA}(PUQ), P, \mathbf{AXA}(PUQ), \neg Q, \\ &\quad \neg P \vee \mathbf{EXE}(\neg PBQ), \mathbf{EXE}(\neg PBQ)\} \end{aligned}$$

Koska solmut C_4 , C_5 ja C_6 ovat ristiriitaisia, ne voidaan karsia pois. Jäljelle jää solmu C_7 , jolle saadaan OR-seuraaja $\{\mathbf{A}(PUQ), \mathbf{E}(\neg PBQ)\} = D_1$.

AND-solmu C_7 karsitaan pois, sillä tämä solmu sisältää tulevaisuuslauseen $\mathbf{A}(PUQ)$, joka ei toteudu solmussa. Tämä johtuu siitä, että taulusta ei voida erottaa solmusta C_7 lähtevää luentokalvoissa esitetyt ehdot täyttävää asyklistä aligraafia, jonka kaikki lehtisolmut sisältäisivät lauseen Q , ja lause P olisi mukana kaikissa muissa aligraafin AND-solmuissa.

Solmun C_7 poistamisen jälkeen voidaan karsintasääntöjen perusteella poistaa järjestyksessä solmut D_1 , C_3 ja D_0 . Koska jäljelle jäävässä taulussa ei ole yhtään AND-solmua, joka sisältäisi lauseen

$$\left(Q \vee (P \wedge \mathbf{AXA}(PUQ)) \right) \wedge \mathbf{E}(\neg PBQ),$$

seuraa, että lause on toteutumaton. Siten lauseen negaatio (alkuperäinen lause) on pätevä.

2. Muunnetaan lause ensin positiiviseen normaalimuotoon.

$$\begin{aligned} & \mathbf{GFP} \rightarrow \mathbf{GF}\neg P \\ & \neg\mathbf{GFP} \vee \mathbf{GF}\neg P \\ & \mathbf{FG}\neg P \vee \mathbf{GF}\neg P \end{aligned}$$

Korvataan sitten lauseessa esiintyvät LTL:n konnektiivit **F** ja **G** CTL:n konnektiiveilla **AF** ja **AG**, jolloin saadaan CTL-lause

$$\mathbf{AFAG}\neg P \vee \mathbf{AGAF}\neg P.$$

Tämä CTL-lause on toteutuva, jos ja vain, jos alkuperäinen LTL-lause on toteutuva. Tutkitaan siis taulumenetelmällä, onko CTL-lause toteutuva. Taulun juurena on OR-solmu

$$D_0 = \{\mathbf{AFAG}\neg P \vee \mathbf{AGAF}\neg P\}.$$

D_0 :n AND-seuraajat:

$$C_0 = \{\mathbf{AFAG}\neg P \vee \mathbf{AGAF}\neg P, \mathbf{AFAG}\neg P, \mathbf{AG}\neg P, \neg P, \mathbf{AXAG}\neg P\}$$

$$C_1 = \{\mathbf{AFAG}\neg P \vee \mathbf{AGAF}\neg P, \mathbf{AFAG}\neg P, \mathbf{AXAFAG}\neg P\}$$

$$C_2 = \{\mathbf{AFAG}\neg P \vee \mathbf{AGAF}\neg P, \mathbf{AGAF}\neg P, \mathbf{AF}\neg P, \mathbf{AXAGAF}\neg P, \neg P\}$$

$$C_3 = \{\mathbf{AFAG}\neg P \vee \mathbf{AGAF}\neg P, \mathbf{AGAF}\neg P, \mathbf{AF}\neg P, \mathbf{AXAGAF}\neg P, \mathbf{AXAF}\neg P\}$$

C_0 :n OR-seuraaja: $D_1 = \{\mathbf{AG}\neg P\}$

C_1 :n OR-seuraaja: $D_2 = \{\mathbf{AFAG}\neg P\}$

C_2 :n OR-seuraaja: $D_3 = \{\mathbf{AGAF}\neg P\}$

C_3 :n OR-seuraaja: $D_4 = \{\mathbf{AGAF}\neg P, \mathbf{AF}\neg P\}$

D_1 :n AND-seuraaja: $C_4 = \{\mathbf{AG}\neg P, \neg P, \mathbf{AXAG}\neg P\}$

D_2 :n AND-seuraajat:

$$C_5 = \{\mathbf{AFAG}\neg P, \mathbf{AG}\neg P, \neg P, \mathbf{AXAG}\neg P\}$$

$$C_6 = \{\mathbf{AFAG}\neg P, \mathbf{AXAFAG}\neg P\}$$

D_3 :n AND-seuraajat:

$$C_7 = \{\mathbf{AGAF}\neg P, \mathbf{AF}\neg P, \mathbf{AXAGAF}\neg P, \neg P\}$$

$$C_8 = \{\mathbf{AGAF}\neg P, \mathbf{AF}\neg P, \mathbf{AXAGAF}\neg P, \mathbf{AXAF}\neg P\}$$

D_4 :n AND-seuraajat:

$$C_9 = \{\mathbf{AGAF}\neg P, \mathbf{AF}\neg P, \mathbf{AXAGAF}\neg P, \neg P\} = C_7$$

$$C_{10} = \{\mathbf{AGAF}\neg P, \mathbf{AF}\neg P, \mathbf{AXAGAF}\neg P, \mathbf{AXAF}\neg P\} = C_8$$

$$C_4\text{:n OR-seuraaja: } D_5 = \{\mathbf{AG}\neg P\} = D_1$$

$$C_5\text{:n OR-seuraaja: } D_6 = \{\mathbf{AG}\neg P\} = D_1$$

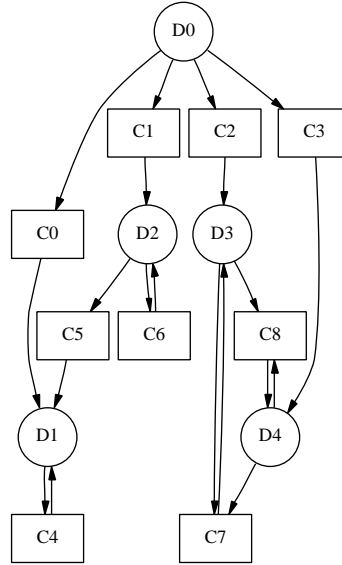
$$C_6\text{:n OR-seuraaja: } D_7 = \{\mathbf{AFAG}\neg P\} = D_2$$

$$C_7\text{:n OR-seuraaja: } D_8 = \{\mathbf{AGAF}\neg P\} = D_3$$

$$C_8\text{:n OR-seuraaja: } D_9 = \{\mathbf{AGAF}\neg P, \mathbf{AF}\neg P\} = D_4$$

Huomaa, että mikään yllä syntyvistä AND-solmuista ei ole ristiriitainen, joten solmujen karsinta ristiriitaisuuden perusteella ei tässä tehtävässä ole mahdollista.

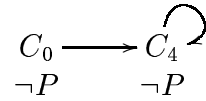
Alustava taulu T_0 :



Koska solmu C_4 ei sisällä keskenään ristiriitaisia lauseita eikä myöskään yhtään tulevaisuuslauseetta, solmu C_4 jää myös lopulliseen tauluun. Tällöin OR-solmulle D_1 jää tauluun seuraaja, joten solmua D_1 ei myöskään karsita. Kaikki solmun C_0 seuraajat jäävät siis myös lopulliseen tauluun. Solmua C_0 ei karsita, koska se ei sisällä keskenään ristiriitaisia lauseita ja koska sen kaikki tulevaisuuslauseet (tässä tapauksessa vain yksi, $\mathbf{AFAG}\neg P$) toteutuvat alustavassa taulussa.

Seuraa, että T_0 :sta saatava lopullinen taulu sisältää AND-solmun C_0 , joka sisältää lauseen $\mathbf{AFAG}\neg P \vee \mathbf{AGAF}\neg P$. Todetaan, että tämä CTL-lause on toteutuva.

Solmujen C_0 ja C_4 avulla voidaan nyt muodostaa CTL-lauseelle malli



Koska CTL-lause $\mathbf{AFAG}\neg P \vee \mathbf{AGAF}\neg P$ on toteutuva, seuraa, että myös LTL-lause $\mathbf{FG}\neg P \vee \mathbf{GF}\neg P \equiv \mathbf{GF}P \rightarrow \mathbf{GF}\neg P$ on toteutuva.