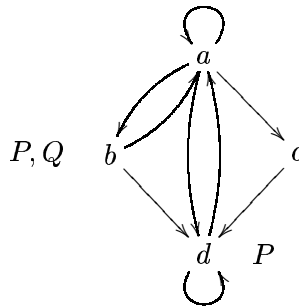


Logiikka tietotekniikassa: erityiskysymyksiä I
 Laskuharjoitus 12
 Ratkaisut

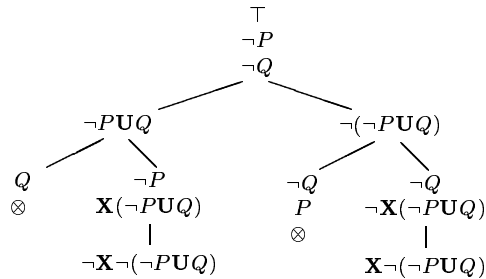
1. \mathcal{M} :



Lauseen $\mathbf{X}(\neg PUQ)$ sulkeuma:

$$\text{CL}(\mathbf{X}(\neg PUQ)) = \{ \mathbf{X}(\neg PUQ), \neg \mathbf{X}(\neg PUQ), \neg PUQ, \mathbf{X}\neg(\neg PUQ), \neg(\neg PUQ), \neg P, Q, \neg \mathbf{X}\neg(\neg PUQ), P, \neg Q \}$$

Muodostetaan atomit. Koska $v(a, P) = v(a, Q) = \text{false}$, saadaan tilan a perusteella taulu



Taulun avoimista haaroista saadaan kelvolliset lausejoukot

$$K_1 = \{ \top, \neg P, \neg Q, \neg PUQ, \mathbf{X}(\neg PUQ), \neg \mathbf{X}\neg(\neg PUQ) \}$$

$$K_2 = \{ \top, \neg P, \neg Q, \neg(\neg PUQ), \neg \mathbf{X}(\neg PUQ), \mathbf{X}\neg(\neg PUQ) \}$$

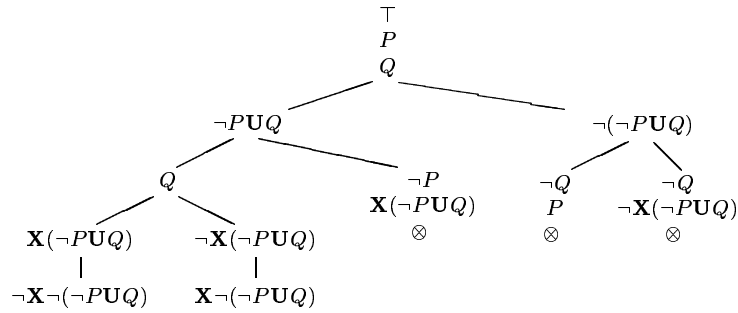
Tilasta a ja näistä lausejoukoista saadaan siten atomit (a, K_1) ja (a, K_2) . (Lausejoukot K_1 ja K_2 ovat siis suurimmat mahdolliset $\text{CL}(\mathbf{X}(\neg PUQ))$:n ristiriidattomat¹ osajoukot, jotka ovat yhtäpitäviä

¹Lausejoukko K on ristiriitainen, jos $\varphi, \neg\varphi \in K$ jollekin lauseelle φ .

atomilauseiden valuaation kanssa tilassa a : minkä tahansa lauseen $\varphi \in \text{CL}(\mathbf{X}(\neg\text{PU}Q)) \setminus K_i$ lisääminen joukkoon K_i , $i \in \{1, 2\}$, tekisi lausejoukon ristiriitaiseksi.)

Koska atomilauseilla P ja Q on tilassa c sama valuaatio kuin tilassa a , tilan c perusteella saadaan atomit (c, K_1) ja (c, K_2) .

Muodostetaan taulu tilan b atomilauseiden valuaation perusteella:



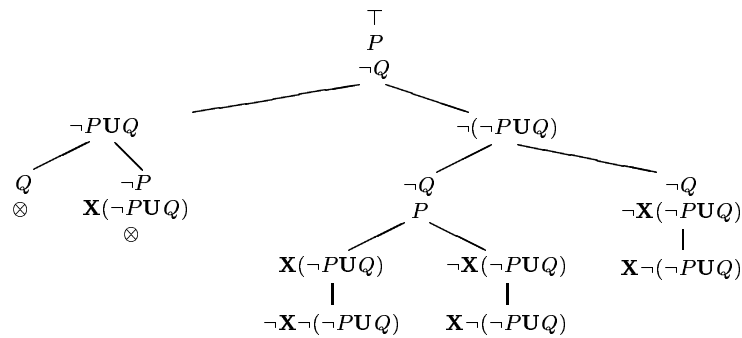
Taulun avoimista haaroista saadaan lausejoukot

$$K_3 = \{\top, P, Q, \neg\text{PU}Q, \mathbf{X}(\neg\text{PU}Q), \neg\mathbf{X}\neg(\neg\text{PU}Q)\}$$

$$K_4 = \{\top, P, Q, \neg\text{PU}Q, \neg\mathbf{X}(\neg\text{PU}Q), \mathbf{X}\neg(\neg\text{PU}Q)\}$$

Tilan b perusteella saadaan siis atomit (b, K_3) ja (b, K_4) .

Muodostetaan vielä taulu tilan d suhteen:



Nyt saadaan lausejoukot

$$K_5 = \{\top, P, \neg Q, \neg(\neg\text{PU}Q), \mathbf{X}(\neg\text{PU}Q), \neg\mathbf{X}\neg(\neg\text{PU}Q)\}$$

$$K_6 = \{\top, P, \neg Q, \neg(\neg\text{PU}Q), \neg\mathbf{X}(\neg\text{PU}Q), \mathbf{X}\neg(\neg\text{PU}Q)\}$$

(lausejoukko K_6 saadaan kahdesta taulun avoimesta haarasta). Tilan d perusteella saadaan siis atomit (d, K_5) ja (d, K_6) .

Muodostetaan graafi $G = (N, E)$, jonka solmujen joukko N koostuu kaikista edellä määritetyistä atomeista, ts.

$$N = \{(a, K_1), (a, K_2), (b, K_3), (b, K_4), (c, K_1), (c, K_2), (d, K_5), (d, K_6)\}$$

ja jonka kaaret toteuttavat seuraavan ehdon: atomista (s, K) on kaari atomiin (s', K') , jos ja vain, jos

- (a) $\langle s, s' \rangle \in R$ (mallissa \mathcal{M}) ja
- (b) kaikille K :n muotoa $\mathbf{X}\varphi$ oleville lauseille pätee $\varphi \in K'$.

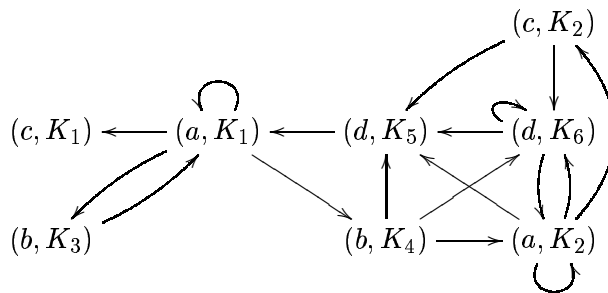
Jälkimmäisen ehdon tarkistamiseksi voidaan ensin muodostaa K_i -joukkojen välille ”yhteensopivuusrelaatio”, joka voidaan esittää taulukkona seuraavasti:

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6
K_1	×		×	×		
K_2		×			×	×
K_3	×		×	×		
K_4		×			×	×
K_5	×		×	×		
K_6		×			×	×

Taulukon i :nnen rivin j :nessä sarakkeessa on rasti, jos ja vain, jos kaikille lauseille $\mathbf{X}\varphi \in K_i$ pätee $\varphi \in K_j$: esimerkiksi pari (K_1, K_3) toteuttaa ehdon, koska $\mathbf{X}(\neg\text{PU}Q) \in K_1$ on K_1 :n ainoa muotoa $\mathbf{X}\varphi$ oleva lause ja $\neg\text{PU}Q \in K_3$.

Ehdot (a) ja (b) voidaan nyt tarkistaa relaation R ja yllä olevan taulukon avulla. Esimerkiksi atomista (b, K_3) voisi relaatiota R koskevan ehdon (a) perusteella olla kaari mihin tahansa atomeista $\{(a, K_1), (a, K_2), (d, K_5), (d, K_6)\}$; koska K -joukkojen välinen ehto ei kuitenkaan yllä olevan taulukon perusteella päde pareille (K_3, K_2) , (K_3, K_5) ja (K_3, K_6) , jäljelle jää ainoastaan kaari $\langle (b, K_3), (a, K_1) \rangle$.

Graafiksi G saadaan

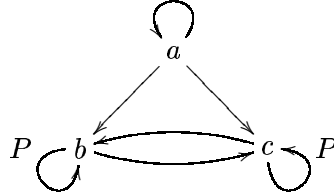


Lauseen $\mathbf{EX}(\neg\mathbf{PUQ})$ toteutuvuuden määrittämiseksi tilassa a tutkitaan, onko graafissa G polkua, joka alkaa jostakin atomista (a, K) ($K \in \{K_1, \dots, K_6\}$) siten, että lause $\mathbf{X}(\neg\mathbf{PUQ})$ kuuluu joukkoon K , ja polku johtaa johonkin itsetoteutuvaan ei-triviaaliin vahvasti kytkettyyn komponenttiin. (Vahvasti kytketty komponentti $C \subseteq N$ on itsetoteutuva, jos kaikkien atomien $(s, K) \in C$ kaikille joukkoon K kuuluville muotoa $\varphi\mathbf{U}\psi$ oleville lauseille on olemassa atomi $(s', K') \in C$ siten, että $\psi \in K'$.)

Graafin G ainoa ei-triviaali vahvasti kytketty komponentti on $C = \{(a, K_1), (a, K_2), (b, K_3), (b, K_4), (c, K_2), (d, K_5), (d, K_6)\}$. Tämä komponentti on myös itsetoteutuva, sillä ainoa C :n solmuissa esiintyvä muotoa $\varphi\mathbf{U}\psi$ oleva lause on $\neg\mathbf{PUQ}$, ja C sisältää esim. atomin (b, K_3) , jolle pätee $Q \in K_3$.

Nähdään, että komponentti C on saavutettavissa esimerkiksi atomista (a, K_1) (koska $(a, K_1) \in C$). Koska $\mathbf{X}(\neg\mathbf{PUQ}) \in K_1$, seuraa, että $\mathcal{M}, a \models \mathbf{EX}(\neg\mathbf{PUQ})$ pätee.

2. \mathcal{M} :



$\mathcal{M}, a \models \mathbf{AFGP}$ pätee, jos ja vain, jos $\mathcal{M}, a \models \neg\mathbf{E}\neg\mathbf{FGP}$ pätee, jos ja vain, jos $\mathcal{M}, a \not\models \mathbf{E}\neg\mathbf{FGP}$. Tutkitaan siis, päteekö $\mathcal{M}, a \models \mathbf{E}\neg\mathbf{FGP}$. Kirjoitetaan lause $\neg\mathbf{FGP}$ käyttämällä ainoastaan \mathbf{X} - ja \mathbf{U} -temporaalikonnektiiveja:

$$\begin{aligned} \neg\mathbf{FGP} &\equiv \neg\mathbf{F}\neg\mathbf{F}\neg P \\ &\equiv \neg\mathbf{F}\neg(\top\mathbf{U}\neg P) \\ &\equiv \neg(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)) \end{aligned}$$

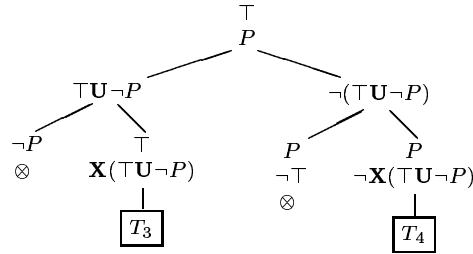
Lauseen $\neg(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P))$ sulkeuma:

$$\begin{aligned} \text{CL}(\neg(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P))) &= \{\neg(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)), \top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P), \\ &\quad \top, \neg(\top\mathbf{U}\neg P), \mathbf{X}(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)), \neg\top, \\ &\quad \top\mathbf{U}\neg P, \neg\mathbf{X}(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)), \neg P, \\ &\quad \mathbf{X}(\top\mathbf{U}\neg P), \mathbf{X}\neg(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)), P, \\ &\quad \neg\mathbf{X}(\top\mathbf{U}\neg P), \neg\mathbf{X}\neg(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)), \\ &\quad \mathbf{X}\neg(\top\mathbf{U}\neg P), \neg\mathbf{X}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\} \end{aligned}$$

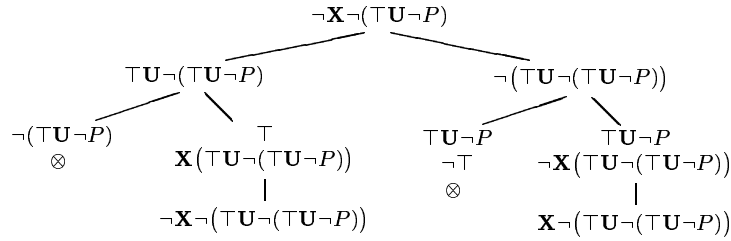
$$K_5 = \{\top, \neg P, \top U \neg P, \mathbf{X}(\top U \neg P), \neg \mathbf{X} \neg(\top U \neg P), \top U \neg(\top U \neg P), \mathbf{X}(\top U \neg(\top U \neg P)), \neg \mathbf{X} \neg(\top U \neg(\top U \neg P))\}$$

$$K_6 = \{\top, \neg P, \top U \neg P, \mathbf{X}(\top U \neg P), \neg \mathbf{X} \neg(\top U \neg P), \neg(\top U \neg(\top U \neg P)), \neg \mathbf{X}(\top U \neg(\top U \neg P)), \mathbf{X} \neg(\top U \neg(\top U \neg P))\}$$

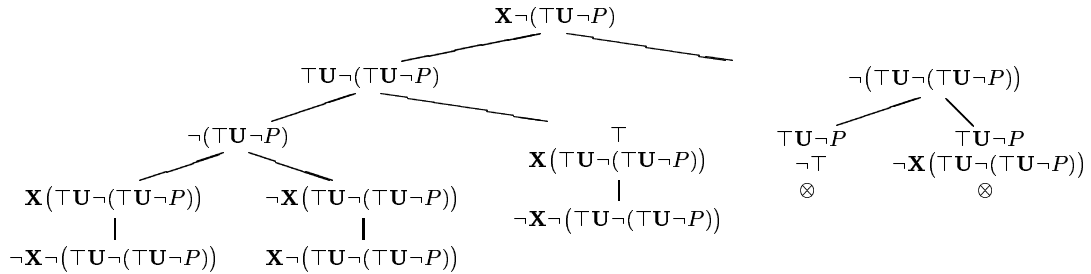
Näin saadaan atomit (a, K_1) , (a, K_2) , (a, K_3) , (a, K_4) , (a, K_5) ja (a, K_6) .
Koska $v(b, P) = v(c, P) = \text{true}$, tilojen b :n ja c :n perusteella saadaan taulu



jossa haara T_3 on



ja haara T_4 on



Näin saadaan lausejoukot

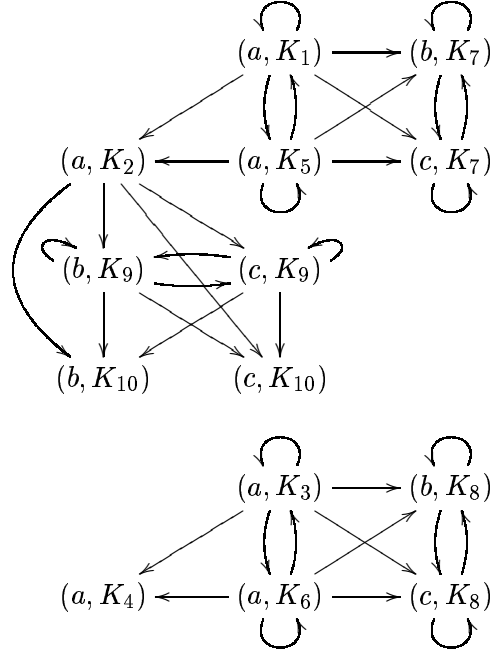
$$\begin{aligned}
K_7 &= \{ \top, P, \top\mathbf{U}\neg P, \mathbf{X}(\top\mathbf{U}\neg P), \neg\mathbf{X}\neg(\top\mathbf{U}\neg P), \top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P), \\
&\quad \mathbf{X}(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)), \neg\mathbf{X}\neg(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)) \} \\
K_8 &= \{ \top, P, \top\mathbf{U}\neg P, \mathbf{X}(\top\mathbf{U}\neg P), \neg\mathbf{X}\neg(\top\mathbf{U}\neg P), \neg(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)), \\
&\quad \neg\mathbf{X}(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)), \mathbf{X}\neg(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)) \} \\
K_9 &= \{ \top, P, \neg(\top\mathbf{U}\neg P), \neg\mathbf{X}(\top\mathbf{U}\neg P), \mathbf{X}\neg(\top\mathbf{U}\neg P), \top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P), \\
&\quad \mathbf{X}(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)), \neg\mathbf{X}\neg(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)) \} \\
K_{10} &= \{ \top, P, \neg(\top\mathbf{U}\neg P), \neg\mathbf{X}(\top\mathbf{U}\neg P), \mathbf{X}\neg(\top\mathbf{U}\neg P), \top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P), \\
&\quad \neg\mathbf{X}(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)), \mathbf{X}\neg(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)) \}
\end{aligned}$$

(lausejoukko K_9 saadaan taulun kahdesta haarasta). Näin saadaan atomit (b, K_7) , (b, K_8) , (b, K_9) , (b, K_{10}) sekä (c, K_7) , (c, K_8) , (c, K_9) ja (c, K_{10}) .

K -joukkojen välinen ”yhteensopivuusrelaatio” on nyt seuraava:

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7	K_8	K_9	K_{10}
K_1	×	×			×		×			
K_2									×	×
K_3			×	×		×		×		
K_4										
K_5	×	×			×		×			
K_6			×	×		×		×		
K_7	×	×			×		×			
K_8			×	×		×		×		
K_9									×	×
K_{10}										

Graafi G :



G :n ei-triviaalit vahvasti kytketyt komponentit ovat

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \{(a, K_1), (a, K_5)\} \\
 C_2 &= \{(a, K_3), (a, K_6)\} \\
 C_3 &= \{(b, K_7), (c, K_7)\} \\
 C_4 &= \{(b, K_8), (c, K_8)\} \\
 C_5 &= \{(b, K_9), (c, K_9)\}
 \end{aligned}$$

Näistä komponenteista C_2 ja C_5 ovat itsetoteutuvia. On siis tutkittava, onko jompikumpi näistä komponenteista saavutettavissa jostakin graafin solmusta (a, K) , missä $\neg(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)) \in K$. Koska lause $\neg(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P))$ kuuluu esimerkiksi joukkoon K_6 ja C_2 on saavutettavissa solmusta (a, K_6) (koska $(a, K_6) \in C_2$), seuraa, että $\mathcal{M}, a \models \mathbf{E}\neg\mathbf{FGP}$ pätee. Siten $\mathcal{M}, a \models \mathbf{AFGP}$ ei päde mallissa \mathcal{M} .