# Perustuloksia malleista

- Kehys = struktuuri predikaattilogiikalle, jossa on yksi kaksipaikkainen predikaattisymboli ($R$): ko. logiikan struktuuri $\mathcal{S}$ voidaan esittää muodossa $\langle U, R^{\mathcal{S}}\rangle$, missä $U$ on struktuurin universumi ja $R^{\mathcal{S}} \subseteq U \times U$ predikaattisymbolin $R$ tulkinta.
- Propositionaalista modaalilogiikkaa voidaan käyttää kvantifioidun logiikan tilalla: predikaattilogiikan lauseelle $P$ voidaan antaa vastaava modaalilause $P'$ siten, että $P$ on tosi struktuurissa joss $P'$ on pätevä struktuurissa tulkittuna modaalilogiikan kehyksenä.
- Kuinka pitkälle modaalilogiikka riittää? (Minkälaisia predikaattilogiikan lauseita ei voida esittää modaalilogiikalla?)
- Tarkastellaan muutamaa pätevyyden säilyttävää operaatiota kehyksille (generoitu alikehys, pistevieras unioni ja p-morfismi), jotka antavat viitteitä modaalilogiikan ilmaisuvoiman rajoista.

© 2004 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio



# Kehyksen ominaisuudet lauseina

**Esimerkki.** $\Box P \to P$ on pätevä kehyksessä $\langle S, R\rangle$ joss $R$ on refleksiivinen ($\forall x R(x,x)$ on tosi struktuurissa $\langle S, R\rangle$).

($\Leftarrow$) Olkoon $R$ refleksiivinen. Olkoon $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$ kehykseen $\langle S, R\rangle$ perustuva malli ja $s \in S$.

Jos $\mathcal{M}, s \Vdash \Box P$, $\mathcal{M}, s \Vdash P$, koska $sRs$. Täten $\mathcal{M}, s \Vdash \Box P \to P$.

($\Rightarrow$) Oletetaan, että $R$ ei ole refleksiivinen kehyksessä $\langle S, R\rangle$. Tällöin on olemassa $s_0 \in S$, jolle $s_0 R s_0$ ei päde.

Olkoon $v(s, P) = \text{true}$ jos $s_0 R s$ muutoin $v(s, P) = \text{false}$. Nyt $v(s_0, P) = \text{false}$.

Olkoon $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$. Tällöin $\mathcal{M}, s_0 \Vdash \Box P$ mutta $\mathcal{M}, s_0 \nVdash P$.

Siis $\mathcal{M}, s_0 \nVdash \Box P \to P$, joten $\Box P \to P$ ei ole pätevä kehyksessä $\langle S, R\rangle$.

© 2004 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio



# Generoitu alikehys (I)

**Määritelmä.** Olkoon $\langle S, R\rangle$ kehys ja $S_0 \subseteq S$. Joukon $S_0$ generoima alikehys on kehys $\langle S^*, R^*\rangle$, missä $S^*$ on pienin $R$-suljettu $S$:n alijoukko, joka sisältää $S_0$:n ja $R^*$ on $R$ rajoitettuna joukolle $S^*$ ($R^* = \{\langle s_1, s_2\rangle \in R \mid s_1, s_2 \in S^*\}$).

Joukon $S$ alijoukko $H$ on $R$-suljettu, jos $t \in H$ aina, kun $s \in H$ ja $sRt$.

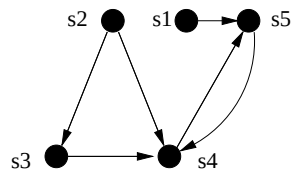
Huom. $S^*$ on niiden maailmojen joukko, jotka voidaan saavuttaa $S_0$:sta (transitiivisesti).

**Määritelmä.** Mallin $\langle S, R, v\rangle$ generoitu alimalli on malli $\langle S^*, R^*, v^*\rangle$, missä $\langle S^*, R^*\rangle$ on generoitu alikehys ja $v^*$ on $v$ rajoitettuna $S^*$:lle. Alikehys on generoitu, jos se on jonkun maailmojen joukon generoima.

© 2004 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio



# Generoitu alikehys (II)




Yllä olevassa kehyksessä:

- joukon $\{s2\}$ generoima alikehys: tilat $\{s2, s3, s4, s5\}$ ja niiden väliset kaaret.
- joukon $\{s5\}$ generoima alikehys: tilat $\{s5, s4\}$ ja niiden väliset kaaret.
- joukon $\{s1, s3\}$ generoima alikehys: tilat $\{s1, s3, s5, s4\}$ ja niiden väliset kaaret.

© 2004 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

# Generoitu alikehys (III)

**Propositio.** Jos $\mathcal{M}^*$ on $\mathcal{M}$:n generoitu alimalli, niin jokaiselle lauseelle $P$ jokaisessa $\mathcal{M}^*$:n maailmassa $s$ pätee: $\mathcal{M}, s \Vdash P$ joss $\mathcal{M}^*, s \Vdash P$.

**Esimerkki.** Olkoon $S = \{s, t_1, t_2\}$; $R = \{\langle t_1, t_2\rangle\}$.

Joukon $\{s\}$ generoima alikehys on $S^* = \{s\}$; $R^* = \{\}$.

$\exists x \exists y R(x, y)$ on tosi kehyksessä $\langle S, R\rangle$.
$\exists x \exists y R(x, y)$ on epätosi kehyksessä $\langle S^*, R^*\rangle$.

Mutta kaikille lauseille $P$ ja jokaiselle valuaatiolle $v$

$\langle S, R, v\rangle, s \Vdash P$ joss $\langle S^*, R^*, v^*\rangle, s \Vdash P$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Ei ole lausetta $P$ siten, että $P$ on pätevä kehyksessä $\langle S, R\rangle$ joss $R$:lle pätee $\exists x \exists y R(x, y)$.

© 2004 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio



# Kehyksien pistevieras unioni

Pistevieras unioni: 'kopiot' kehyksistä niin, etteivät maailmojen joukot leikkaa ja otetaan unioni maailmoista ja saavutettavuusrelaatioista.

**Propositio.** Lause $P$ on pätevä kahden kehyksen pistevieraassa unionissa joss $P$ on pätevä kummassakin kehyksessä.

**Esimerkki.** Olkoon $S = \{s\}$; $R = \{\langle s, s\rangle\}$.
Kehyksen $\langle S, R\rangle$ pistevieras unioni itsensä kanssa $\langle S, R\rangle \dot\cup \langle S, R\rangle = \langle S', R'\rangle$ missä $S' = \{s_1, s_2\}$; $R' = \{\langle s_1, s_1\rangle, \langle s_2, s_2\rangle\}$.

$\forall x \forall y R(x, y)$ on tosi kehyksessä $\langle S, R\rangle$.
$\forall x \forall y R(x, y)$ on epätosi kehyksessä $\langle S', R'\rangle$.
Mutta kaikille lauseille $P$: $\langle S, R\rangle \models P$ joss $\langle S', R'\rangle \models P$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Ei ole lausetta $P$ siten, että $P$ on pätevä kehyksessä $\langle S, R\rangle$ joss $R$:lle pätee $\forall x \forall y R(x, y)$.

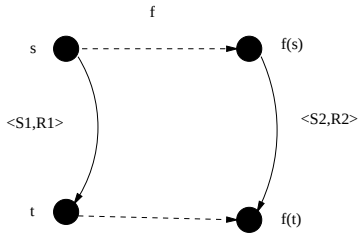
© 2004 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio



# Kehysten p-morfismi (I)

**Määritelmä.** Kuvaus $f$ kehykseltä $\langle S_1, R_1\rangle$ kehykselle $\langle S_2, R_2\rangle$ on p-morfismi joss

1. $f$ on kuvaus joukolta $S_1$ joukolle $S_2$ s.e. jokaiselle $s \in S_2$ olemassa $t \in S_1$, jolle $s = f(t)$.
2. kaikille $s, t \in S_1$, jos $sR_1t$, niin $f(s)R_2f(t)$ ja
3. kaikille $s \in S_1$ ja $u \in S_2$, jos $f(s)R_2u$, niin on olemassa $t \in S_1$ siten, että $sR_1t$ ja $f(t) = u$.

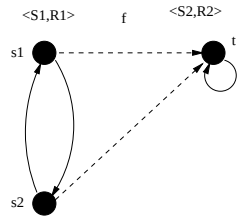



© 2004 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio



# Kehysten p-morfismi (II)

**Esimerkki.** Olkoon
$S_1 = \{s_1, s_2\}$;
$R_1 = \{\langle s_1, s_2\rangle, \langle s_2, s_1\rangle\}$ ja
$S_2 = \{t\}$; $R_2 = \{\langle t, t\rangle\}$.
Olkoon $f(s_1) = f(s_2) = t$.
Funktio $f$ on p-morfismi.




© 2004 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

## Kehysten p-morfismi (III)

**Propositio.** Jos on olemassa p-morfismi kehykseltä $\langle S_1, R_1\rangle$ kehykselle $\langle S_2, R_2\rangle$, niin jokainen ensimmäisessä kehyksessä pätevä lause on pätevä myös toisessa kehyksessä.

**Esimerkki.** (Jatkuu)
$\forall x \neg R(x,x)$ on tosi kehyksessä $\langle S_1, R_1\rangle$.
$\forall x \neg R(x,x)$ on epätosi kehyksessä $\langle S_2, R_2\rangle$.

Kuitenkin jokaiselle lauseelle $P$:
jos $P$ on pätevä kehyksessä $\langle S_1, R_1\rangle$, niin $P$ on pätevä kehyksessä $\langle S_2, R_2\rangle$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Ei ole lausetta $P$ siten, että $P$ on pätevä kehyksessä $\langle S, R\rangle$ joss $R$:lle pätee $\forall x \neg R(x,x)$.

© 2004 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio



## Looginen seuraavuus (I)

$\Sigma \models P$:

- Lauselogiikka
  $P$ on tosi jokaisessa mallissa, jossa $\Sigma$ on tosi.
- Modaalilogiikka (useita mahdollisia tulkintoja)
  - Kaikille malleille pätee, että $P$ on tosi jokaisessa mallin maailmassa, jossa $\Sigma$ on tosi.
  - $P$ on pätevä jokaisessa mallissa, jossa $\Sigma$ on pätevä.
  - $P$ on pätevä jokaisessa kehyksessä, jossa $\Sigma$ on pätevä.
- Otetaan käyttöön looginen seuraus, joka yhdistää kaikki kolme tulkintaa

© 2004 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio



## Looginen seuraavuus (II)

**Määritelmä.** Olkoon $\mathbf{L}$ joukko kehyksiä, $\Sigma$ ja $\Upsilon$ lausejoukkoja ja $P$ lause. Lause $P$ seuraa loogisesti globaaleista premisseista $\Sigma$ ja lokaaleista premisseista $\Upsilon$ kehyslogiikassa $\mathbf{L}$ ($\Sigma \models_{\mathbf{L}} \Upsilon \Longrightarrow P$)

joss jokaiselle joukon $\mathbf{L}$ kehykseen perustuvalle mallille $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$, jossa $\mathcal{M} \models \Sigma$, ja jokaiselle sen maailmalle $s \in S$, jossa $\mathcal{M}, s \models \Upsilon$, pätee $\mathcal{M}, s \models P$.

**Esimerkki.** Olkoon $\mathbf{L}$ kaikkien kehysten joukko.

Jos $\Sigma \models_{\mathbf{L}} \emptyset \Longrightarrow P$, niin $\Sigma \models_{\mathbf{L}} \emptyset \Longrightarrow \Box P$.

$\{P\} \models_{\mathbf{L}} \emptyset \Longrightarrow \Box P$

Mutta $\emptyset \not\models_{\mathbf{L}} \{P\} \Longrightarrow \Box P$.

© 2004 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio



## Looginen seuraavuus (III)

**Määritelmä.** Jos $\mathbf{L}_1$ ja $\mathbf{L}_2$ ovat kaksi kehysjoukkoa ja $\mathbf{L}_2 \subseteq \mathbf{L}_1$, sanomme, että $\mathbf{L}_1$ on heikompi kuin $\mathbf{L}_2$ ja kirjoitamme $\mathbf{L}_1 \leq \mathbf{L}_2$.

Jos $\mathbf{L}_1$ on heikompi kuin $\mathbf{L}_2$, $\mathbf{L}_1$-pätevät lauseet ovat $\mathbf{L}_2$-päteviä.

**Teoreema.** (Monotonisuus) Olkoon $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2$, $\Upsilon_1 \subseteq \Upsilon_2$ ja $\mathbf{L}_1 \leq \mathbf{L}_2$. Tällöin jos $\Sigma_1 \models_{\mathbf{L}_1} \Upsilon_1 \Longrightarrow P$, niin $\Sigma_2 \models_{\mathbf{L}_2} \Upsilon_2 \Longrightarrow P$.

**Teoreema.** (Korvattavuus) Olkoon $Q$ ja $Q'$ samat lauseet paitsi, että jossain paikoissa, joissa $P$ on $Q$:n alilause, $P'$ on $Q'$:n alilause. Tällöin

$\Sigma \cup \{P \leftrightarrow P'\} \models_{\mathbf{L}} \emptyset \Longrightarrow Q \leftrightarrow Q'$.

Huom! $\{\} \not\models_{\mathbf{L}} \{P \leftrightarrow P'\} \Longrightarrow \Box P \leftrightarrow \Box P'$.

© 2004 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

# Deduktioteoreema (I)

Lauselogiikka: $\Sigma \cup \{Q\} \models P$ joss $\Sigma \models Q \to P$.

**Teoreema.** (Paikallinen deduktioteoreema)
$\Sigma \models_{\mathbf{L}} \Upsilon \cup \{Q\} \Longrightarrow P$ joss $\Sigma \models_{\mathbf{L}} \Upsilon \Longrightarrow Q \to P$.

**Määritelmä.** Lauseelle $P$, $\Box^0 P = P$ ja $\Box^n P = \Box(\Box^{n-1} P)$.

Esim. $\Box^3 P = \Box\Box\Box P$.

Globaali deduktioteoreema:

$\Sigma \cup \{Q\} \models_{\mathbf{L}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss jollekin $n$
$\Sigma \models_{\mathbf{L}} \Upsilon \cup \{\Box^0 Q, \Box^1 Q, \ldots, \Box^n Q\} \Longrightarrow P$.

(Ei päde kaikille kehysjoukoille $\mathbf{L}$.)

© 2004 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio



# Deduktioteoreema (II)

**Teoreema.** (Globaali deduktioteoreema I)
Jos, jollekin $n$, $\Sigma \models_{\mathbf{L}} \Upsilon \cup \{\Box^0 Q, \Box^1 Q, \ldots, \Box^n Q\} \Longrightarrow P$, niin
$\Sigma \cup \{Q\} \models_{\mathbf{L}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

**Teoreema.** (Globaali deduktioteoreema II)
Olkoon $\mathbf{L}$ joukko kehyksiä, joka on suljettu generoitujen alikehysten ja ultraproduktien suhteen. Tällöin jos $\Sigma \cup \{Q\} \models_{\mathbf{L}} \Upsilon \Longrightarrow P$, niin
$\Sigma \models_{\mathbf{L}} \Upsilon \cup \{\Box^0 Q, \Box^1 Q, \ldots, \Box^n Q\} \Longrightarrow P$ jollekin $n$.

**Teoreema.** (Kompaktius) Olkoon $\mathbf{L}$ joukko kehyksiä, joka on suljettu ultraproduktien suhteen.
Jos $\Sigma \models_{\mathbf{L}} \Upsilon \Longrightarrow P$, niin on olemassa äärelliset joukot $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ ja $\Upsilon_0 \subseteq \Upsilon$ siten, että $\Sigma_0 \models_{\mathbf{L}} \Upsilon_0 \Longrightarrow P$.

(Kurssilla ei käsitellä yo. ultraproduktiehtoa vaan annetaan jatkossa esimerkkejä logiikoista, joille se pätee).

© 2004 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio