



Perustuloksia malleista

- Kehys = struktuuri predikaattilogiikalle, jossa on yksi kaksipaikkainen predikaattisymboli (R): ko. logiikan struktuuri S voidaan esittää muodossa $\langle U, R^S \rangle$, missä U on struktuurin universumi ja $R^S \subseteq U \times U$ predikaattisymbolin R tulkinta.
- Propositionaalista modaalilogiikkaa voidaan käyttää kvantifioidun logiikan tilalla: predikaattilogiikan lauseelle P voidaan antaa vastaava modaalilause P' siten, että P on tosi struktuurissa joss P' on pätevä struktuurissa tulkittuna modaalilogiikan kehyksenä.
- Kuinka pitkälle modaalilogiikka riittää? (Minkälaisia predikaattilogiikan lauseita ei voida esittää modaalilogiikalla?)
- Tarkastellaan muutamaa pätevyyden säilyttävää operaatiota kehyksille (generoitu alikehys, pistevieras unioni ja p-morfismi), jotka antavat viitteitä modaalilogiikan ilmaisuvoiman rajoista.



Generoitu alikehys (I)

Määritelmä. Olkoon $\langle S, R \rangle$ kehys ja $S_0 \subseteq S$. Joukon S_0 **generoima alikehys** on kehys $\langle S^*, R^* \rangle$, missä S^* on pienin R -suljettu S_0 :n alijoukko, joka sisältää S_0 :n ja R^* on R rajoitettuna joukolle S^* ($R^* = \{ \langle s_1, s_2 \rangle \in R \mid s_1, s_2 \in S^* \}$).

Joukon S alijoukko H on **R -suljettu**, jos $t \in H$ aina, kun $s \in H$ ja sRt .

Huom. S^* on niiden maailmojen joukko, jotka voidaan saavuttaa S_0 :sta (transitiivisesti).

Määritelmä. Mallin $\langle S, R, v \rangle$ generoitu alimalli on malli $\langle S^*, R^*, v^* \rangle$, missä $\langle S^*, R^* \rangle$ on generoitu alikehys ja v^* on v rajoitettuna S^* :lle. Alikehys on generoitu, jos se on jonkun maailmojen joukon generoima.



Kehyksen ominaisuudet lauseina

Esimerkki. $\Box P \rightarrow P$ on pätevä kehyksessä $\langle S, R \rangle$ joss R on refleksiivinen ($\forall x R(x, x)$ on tosi struktuurissa $\langle S, R \rangle$).

(\Leftarrow) Olkoon R refleksiivinen. Olkoon $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$ kehyksen $\langle S, R \rangle$ perustuva malli ja $s \in S$.

Jos $\mathcal{M}, s \models \Box P$, $\mathcal{M}, s \models P$, koska sRs . Täten $\mathcal{M}, s \models \Box P \rightarrow P$.

(\Rightarrow) Oletetaan, että R ei ole refleksiivinen kehyksessä $\langle S, R \rangle$. Tällöin on olemassa $s_0 \in S$, jolle $s_0 R s_0$ ei päde.

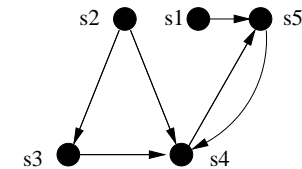
Olkoon $v(s, P) = \text{true}$ jos $s_0 R s$ muutoin $v(s, P) = \text{false}$. Nyt $v(s_0, P) = \text{false}$.

Olkoon $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$. Tällöin $\mathcal{M}, s_0 \models \Box P$ mutta $\mathcal{M}, s_0 \not\models P$.

Siis $\mathcal{M}, s_0 \not\models \Box P \rightarrow P$, joten $\Box P \rightarrow P$ ei ole pätevä kehyksessä $\langle S, R \rangle$.



Generoitu alikehys (II)



Yllä olevassa kehyksessä:

- joukon $\{s2\}$ generoima alikehys: tilat $\{s2, s3, s4, s5\}$ ja niiden väliset kaaret.
- joukon $\{s5\}$ generoima alikehys: tilat $\{s5, s4\}$ ja niiden väliset kaaret.
- joukon $\{s1, s3\}$ generoima alikehys: tilat $\{s1, s3, s5, s4\}$ ja niiden väliset kaaret.

Generoitu alikehys (III)

Propositio. Jos \mathcal{M}^* on \mathcal{M} :n generoitu alimalli, niin jokaiselle lauseelle P jokaisessa \mathcal{M}^* :n maailmassa s pätee: $\mathcal{M}, s \models P$ joss $\mathcal{M}^*, s \models P$.

Esimerkki. Olkoon $S = \{s, t_1, t_2\}$; $R = \{\langle t_1, t_2 \rangle\}$.

Joukon $\{s\}$ generoima alikehys on $S^* = \{s\}$; $R^* = \{\}$.

$\exists x \exists y R(x, y)$ on tosi kehyksessä $\langle S, R \rangle$.

$\exists x \exists y R(x, y)$ on epätosi kehyksessä $\langle S^*, R^* \rangle$.

Mutta kaikille lauseille P ja jokaiselle valuaatiolle v

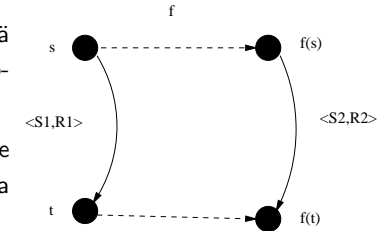
$\langle S, R, v \rangle, s \models P$ joss $\langle S^*, R^*, v^* \rangle, s \models P$.

\Rightarrow Ei ole lausetta P siten, että P on pätevä kehyksessä $\langle S, R \rangle$ joss R :lle pätee $\exists x \exists y R(x, y)$.

Kehysten p-morfismi (I)

Määritelmä. Kuvaus f kehykseltä $\langle S_1, R_1 \rangle$ kehykselle $\langle S_2, R_2 \rangle$ on p-morfismi joss

- f on kuvaus joukolta S_1 joukolle S_2 s.e. jokaiselle $s \in S_2$ olemassa $t \in S_1$, jolle $s = f(t)$.
- kaikille $s, t \in S_1$, jos $s R_1 t$, niin $f(s) R_2 f(t)$ ja
- kaikille $s \in S_1$ ja $u \in S_2$, jos $f(s) R_2 u$, niin on olemassa $t \in S_1$ siten, että $s R_1 t$ ja $f(t) = u$.



Kehyksien pistevieras unioni

Pistevieras unioni: 'kopiot' kehyksistä niin, etteivät maailmojen joukot leikkaa ja otetaan unioni maailmoista ja saavutettavuusrelaatioista.

Propositio. Lause P on pätevä kahden kehyksen pistevieraassa unionissa joss P on pätevä kummassakin kehyksessä.

Esimerkki. Olkoon $S = \{s\}$; $R = \{\langle s, s \rangle\}$.

Kehyksen $\langle S, R \rangle$ pistevieras unioni itsensä kanssa $\langle S, R \rangle \dot{\cup} \langle S, R \rangle = \langle S', R' \rangle$ missä $S' = \{s_1, s_2\}$; $R' = \{\langle s_1, s_1 \rangle, \langle s_2, s_2 \rangle\}$.

$\forall x \forall y R(x, y)$ on tosi kehyksessä $\langle S, R \rangle$.

$\forall x \forall y R(x, y)$ on epätosi kehyksessä $\langle S', R' \rangle$.

Mutta kaikille lauseille P : $\langle S, R \rangle \models P$ joss $\langle S', R' \rangle \models P$.

\Rightarrow Ei ole lausetta P siten, että P on pätevä kehyksessä $\langle S, R \rangle$ joss R :lle pätee $\forall x \forall y R(x, y)$.

Kehysten p-morfismi (II)

Esimerkki. Olkoon

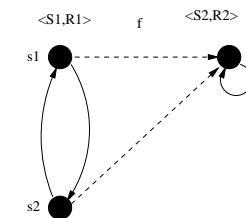
$S_1 = \{s_1, s_2\}$;

$R_1 = \{\langle s_1, s_2 \rangle, \langle s_2, s_1 \rangle\}$ ja

$S_2 = \{t\}$; $R_2 = \{\langle t, t \rangle\}$.

Olkoon $f(s_1) = f(s_2) = t$.

Funktio f on p-morfismi.





Kehysten p-morfismi (III)

Propositio. Jos on olemassa p-morfismi kehykseltä $\langle S_1, R_1 \rangle$ kehykselle $\langle S_2, R_2 \rangle$, niin jokainen ensimmäisessä kehyksessä pätevä lause on pätevä myös toisessa kehyksessä.

Esimerkki. (Jatkuu)

$\forall x \neg R(x, x)$ on tosi kehyksessä $\langle S_1, R_1 \rangle$.

$\forall x \neg R(x, x)$ on epätosi kehyksessä $\langle S_2, R_2 \rangle$.

Kuitenkin jokaiselle lauseelle P :

jos P on pätevä kehyksessä $\langle S_1, R_1 \rangle$, niin P on pätevä kehyksessä $\langle S_2, R_2 \rangle$.

\Rightarrow Ei ole lausetta P siten, että P on pätevä kehyksessä $\langle S, R \rangle$ joss R :lle pätee $\forall x \neg R(x, x)$.



Looginen seuraavuus (II)

Määritelmä. Olkoon \mathbf{L} joukko kehyksiä, Σ ja Υ lausejoukkoja ja P lause. Lause P seuraa loogisesti globaaleista premiseista Σ ja lokaaleista premiseista Υ kehykslogiikassa \mathbf{L} ($\Sigma \models_{\mathbf{L}} \Upsilon \implies P$)

joss jokaiselle joukon \mathbf{L} kehykseen perustuvalla mallilla $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$, jossa $\mathcal{M} \models \Sigma$, ja jokaiselle sen maailmalle $s \in S$, jossa $\mathcal{M}, s \models \Upsilon$, pätee $\mathcal{M}, s \models P$.

Esimerkki. Olkoon \mathbf{L} kaikkien kehysten joukko.

Jos $\Sigma \models_{\mathbf{L}} \emptyset \implies P$, niin $\Sigma \models_{\mathbf{L}} \emptyset \implies \Box P$.

$\{P\} \models_{\mathbf{L}} \emptyset \implies \Box P$

Mutta $\emptyset \not\models_{\mathbf{L}} \{P\} \implies \Box P$.



Looginen seuraavuus (I)

$\Sigma \models P$:

- Lauselogiikka
 P on tosi jokaisessa mallissa, jossa Σ on tosi.
- Modaalilogiikka (useita mahdollisia tulkintoja)
 - Kaikille malleille pätee, että P on tosi jokaisessa mallin maailmassa, jossa Σ on tosi.
 - P on pätevä jokaisessa mallissa, jossa Σ on pätevä.
 - P on pätevä jokaisessa kehyksessä, jossa Σ on pätevä.
- Otetaan käyttöön looginen seuraus, joka yhdistää kaikki kolme tulkintaa



Looginen seuraavuus (III)

Määritelmä. Jos \mathbf{L}_1 ja \mathbf{L}_2 ovat kaksi kehyksjoukkoa ja $\mathbf{L}_2 \subseteq \mathbf{L}_1$, sanomme, että \mathbf{L}_1 on heikompi kuin \mathbf{L}_2 ja kirjoitamme $\mathbf{L}_1 \leq \mathbf{L}_2$.

Jos \mathbf{L}_1 on heikompi kuin \mathbf{L}_2 , \mathbf{L}_1 -pätevät lauseet ovat \mathbf{L}_2 -päteviä.

Teoreema. (Monotonisuus) Olkoon $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2$, $\Upsilon_1 \subseteq \Upsilon_2$ ja $\mathbf{L}_1 \leq \mathbf{L}_2$. Tällöin jos $\Sigma_1 \models_{\mathbf{L}_1} \Upsilon_1 \implies P$, niin $\Sigma_2 \models_{\mathbf{L}_2} \Upsilon_2 \implies P$.

Teoreema. (Korvattavuus) Olkoon Q ja Q' samat lauseet paitsi, että jossain paikoissa, joissa P on Q :n alilause, P' on Q' :n alilause. Tällöin $\Sigma \cup \{P \leftrightarrow P'\} \models_{\mathbf{L}} \emptyset \implies Q \leftrightarrow Q'$.

Huom! $\{\} \not\models_{\mathbf{L}} \{P \leftrightarrow P'\} \implies \Box P \leftrightarrow \Box P'$.



Deduktioteoreema (I)

Lauselogiikka: $\Sigma \cup \{Q\} \models P$ joss $\Sigma \models Q \rightarrow P$.

Teoreema. (Paikallinen deduktioteoreema)

$\Sigma \models_{\mathbf{L}} \Upsilon \cup \{Q\} \implies P$ joss $\Sigma \models_{\mathbf{L}} \Upsilon \implies Q \rightarrow P$.

Määritelmä. Lauseelle P , $\Box^0 P = P$ ja $\Box^n P = \Box(\Box^{n-1} P)$.

Esim. $\Box^3 P = \Box\Box\Box P$.

Globaali deduktioteoreema:

$\Sigma \cup \{Q\} \models_{\mathbf{L}} \Upsilon \implies P$ joss jollekin n

$\Sigma \models_{\mathbf{L}} \Upsilon \cup \{\Box^0 Q, \Box^1 Q, \dots, \Box^n Q\} \implies P$.

(Ei päde kaikille kehysjoukoille \mathbf{L} .)



Deduktioteoreema (II)

Teoreema. (Globaali deduktioteoreema I)

Jos, jollekin n , $\Sigma \models_{\mathbf{L}} \Upsilon \cup \{\Box^0 Q, \Box^1 Q, \dots, \Box^n Q\} \implies P$, niin $\Sigma \cup \{Q\} \models_{\mathbf{L}} \Upsilon \implies P$.

Teoreema. (Globaali deduktioteoreema II)

Olkoon \mathbf{L} joukko kehyksiä, joka on suljettu generoitujen alikehysten ja ultraproduktien suhteen. Tällöin jos $\Sigma \cup \{Q\} \models_{\mathbf{L}} \Upsilon \implies P$, niin $\Sigma \models_{\mathbf{L}} \Upsilon \cup \{\Box^0 Q, \Box^1 Q, \dots, \Box^n Q\} \implies P$ jollekin n .

Teoreema. (Kompaktius) Olkoon \mathbf{L} joukko kehyksiä, joka on suljettu ultraproduktien suhteen.

Jos $\Sigma \models_{\mathbf{L}} \Upsilon \implies P$, niin on olemassa äärelliset joukot $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ ja $\Upsilon_0 \subseteq \Upsilon$ siten, että $\Sigma_0 \models_{\mathbf{L}} \Upsilon_0 \implies P$.

(Kursilla ei käsitellä yo. ultraproduktiehtoa vaan annetaan jatkossa esimerkkejä logiikoista, joille se pätee).