# Modaalilogiikan perusteet

Aluksi käsitellään modaalilogiikoita, joissa on modaalioperaattori $\Box$ ja sen duaalioperaattori $\Diamond$ ($\neg\Box\neg$).

Modaalioperaattorit voidaan luonnolliselle kielelle tulkita monella eri tavalla:

| $\Box P$ | $\Diamond P$ |
|---|---|
| välttämättä $P$ | mahdollisesti $P$ |
| aina tulevaisuudessa $P$ | |
| aina menneisyydessä $P$ | |
| pitäisi olla $P$ | |
| tiedetään että $P$ | |
| uskotaan että $P$ | |

© 2004 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio



# Modaalilogiikan syntaksi

Olkoon annettuna atomilauseiden joukko $\Phi = \{p_1, p_2, \ldots\}$.

*Propositionaaliset modaalilauseet:*

1. Atomilauseet ovat *lauseita*.
2. $\top$ ja $\bot$ ovat *lauseita*.
3. Jos $P$ ja $Q$ ovat lauseita, niin myös $\neg P$, $(P \to Q)$, $\Box P$ ovat *lauseita*.
4. Muita *lauseita* ei ole.

Huom! Lyhennysmerkinnät:

$\Diamond P \Leftrightarrow_{\text{def}} \neg\Box\neg P$ $\quad$ $P \vee Q \Leftrightarrow_{\text{def}} \neg P \to Q$

$P \wedge Q \Leftrightarrow_{\text{def}} \neg(P \to \neg Q)$ $\quad$ $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow_{\text{def}} \neg((P \to Q) \to \neg(Q \to P))$

© 2004 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio



# Tautologiat

Jos lause $Q$ saadaan lauseesta $P$ korvaamalla $P$:n atomilauseet uusilla lauseilla järjestelmällisesti, sanotaan, että $Q$ saadaan $P$:stä *sijoittamalla*.

Lauseita, jotka saadaan sijoittamalla lauselogiikan pätevistä lauseista (tautologioista), sanotaan *klassisiksi tautologioiksi*.

Esim. Lause

$$(\Box\Box P \to (R \to \Box S)) \to (\Box\Box P \to (R \to \Box S))$$

on klassinen tautologia, joka on saatu lauselogiikan tautologiasta $P \to P$ korvaamalla $P$ lauseella $(\Box\Box P \to (R \to \Box S))$

© 2004 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio



# Tautologiat

☞ Klassiset tautologiat voidaan tunnistaa esim. lauselogiikan taulumenetelmällä:
Rakennetaan taulu lauseen negaatiolle pitämällä modaalioperaattorilla alkavia lauseita atomisina (niihin ei sovelleta taulusääntöjä). Jos taulu sulkeutuu, kyseessä on klassinen tautologia.

**Esimerkki.** Osoitetaan, että $(\Box\neg\Box(P \to Q) \wedge \Box(\neg P \wedge \neg Q)) \to (\Box\neg\Box(P \to Q) \vee \Box(\neg P \wedge \neg Q))$ on klassinen tautologia.

1. $\neg((\Box\neg\Box(P \to Q) \wedge \Box(\neg P \wedge \neg Q)) \to (\Box\neg\Box(P \to Q) \vee \Box(\neg P \wedge \neg Q)))$
2. $\Box\neg\Box(P \to Q) \wedge \Box(\neg P \wedge \neg Q)$ (1)
3. $\neg(\Box\neg\Box(P \to Q) \vee \Box(\neg P \wedge \neg Q))$ (1)
4. $\Box\neg\Box(P \to Q)$ (2)
5. $\Box(\neg P \wedge \neg Q)$ (2)
6. $\neg\Box\neg\Box(P \to Q)$ (3)

$\times$

© 2004 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

# Logiikka = (pätevien) lauseiden joukko

**Määritelmä.** *Propositionaalinen modaalilogiikka* $\mathcal{L}$ on joukko propositionaalisia modaalilauseita siten, että

1. kaikki (klassiset) tautologiat kuuluvat joukkoon $\mathcal{L}$;
2. $\mathcal{L}$ on suljettu modus ponensin suhteen (jos $P \in \mathcal{L}$ ja $P \to Q \in \mathcal{L}$, niin $Q \in \mathcal{L}$) ;
3. $\mathcal{L}$ on suljettu sijoituksen suhteen ($P \in \mathcal{L}$ ja $Q$ saadaan sijoittamalla lauseesta $P$, niin $Q \in \mathcal{L}$).

Esim.

(1) Klassiset tautologiat ovat modaalilogiikka.

(2) Kaikkien propositionaalisten modaalilauseiden joukko on modaalilogiikka.

© 2004 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio



# Mahdollisten maailmojen semantiikka

(a.k.a. Kripke-semantiikka)

**Määritelmä.** *Kehys* on pari $\mathcal{F} = \langle S, R \rangle$, missä $S$ on ei-tyhjä joukko ja $R$ on relaatio $R \subseteq S \times S$.

Joukon $S$ alkiot ovat *mahdollisia maailmoja* ja $R$ on maailmojen välinen saavutettavuusrelaatio: jos $s_1 R s_2$, niin $s_2$ on saavutettavissa $s_1$:stä.

**Määritelmä.** *Valuaatio* kehyksessä $\langle S, R \rangle$ on funktio $v$, joka kuvaa mahdolliset maailmat ja atomilauseet totuusarvoille (kaikille $s \in S$ ja atomilauseille $P$, $v(s, P)$ on joko $\mathrm{true}$ tai $\mathrm{false}$).

(Toinen tapa: $v : S \mapsto 2^{\Phi}$; $v(s)$ on tilassa $s$ tosien atomilauseiden joukko).

**Määritelmä.** *Malli* on kolmikko $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$, missä $\langle S, R \rangle$ on kehys ja $v$ valuaatio tässä kehyksessä. $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$ *perustuu kehykseen* $\langle S, R \rangle$.

© 2004 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio



# Toteutuvuusrelaatio

Relaatio $\mathcal{M}, s \Vdash P$, joka kertoo onko lause $P$ tosi mallin $\mathcal{M}$ maailmassa $s$, määritellään seuraavasti.

**Määritelmä.** Olkoon $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$ malli.

1. $\mathcal{M}, s \Vdash P$ joss $v(s, P) = \mathrm{true}$, kun $P$ on atomilause.
2. $\mathcal{M}, s \nVdash \bot$ ja $\mathcal{M}, s \Vdash \top$.
3. $\mathcal{M}, s \Vdash \neg P$ joss $\mathcal{M}, s \nVdash P$.
4. $\mathcal{M}, s \Vdash P \to Q$ joss $\mathcal{M}, s \nVdash P$ tai $\mathcal{M}, s \Vdash Q$.
5. $\mathcal{M}, s \Vdash \Box P$ joss $\mathcal{M}, t \Vdash P$ kaikille $t \in S$ joille $sRt$.

Huom! $\mathcal{M}, s \Vdash \Diamond P$ joss $\mathcal{M}, t \Vdash P$ jollekin $t \in S$ jolle $sRt$.

Toinen paljon käytetty merkintätapa: $\mathcal{M}, s \models P$

© 2004 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

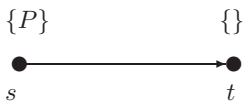


# Toteutuvuusrelaatio

**Esimerkki.** Olkoon $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$ missä

$S = \{s, t\}$
$R = \{\langle s, t \rangle\}$
$v(s, P) = \mathrm{true}$, $v(t, P) = \mathrm{false}$
(tai $v(s) = \{P\}$, $v(t) = \{\}$)

$\mathcal{M}$:




- $\mathcal{M}, s \nVdash \Box P$.
- $\mathcal{M}, t \Vdash \Box P$.
- $\mathcal{M}, s \Vdash \Diamond \neg P$.
- $\mathcal{M}, s \Vdash \Box P \to P$.
- $\mathcal{M}, t \nVdash \Box P \to P$.

© 2004 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

## Pätevyys

**Määritelmä.**

- Lause $P$ on *tosi* mallin $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$ maailmassa $s$ joss $\mathcal{M}, s \Vdash P$.
- Lause $P$ on *pätevä mallissa* $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$, joss $P$ on tosi mallin jokaisessa maailmassa. ($\mathcal{M} \models P$)
- Lause $P$ on *pätevä mallien joukossa* $\mathbf{C}$, joss $P$ on pätevä jokaisessa $\mathbf{C}$:n mallissa. ($\mathbf{C} \models P$)
- Lause $P$ on *pätevä kehysten joukossa* $\mathbf{F}$, joss $P$ on pätevä $\mathbf{F}$:n kehyksiin perustuvien mallien joukossa. ($\mathbf{F} \models P$)

☞ Jos $P$ on pätevä joukossa $\mathbf{C}$ ($\mathbf{F}$), sanomme, että $P$ on $\mathbf{C}$-pätevä ($\mathbf{F}$-pätevä).

© 2004 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio



## Pätevyys

**Esimerkki.** Olkoon $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$ missä $S = \{s, t\}$, $R = \{\langle s, t \rangle\}$ ja $v(s, P) = \text{true}$, $v(t, P) = \text{false}$.

- $\Box P \to P$ ei ole pätevä $\mathcal{M}$:ssä.
  $\mathcal{M}, t \not\Vdash \Box P \to P$.
- $P \vee \Box P$ on pätevä $\mathcal{M}$:ssä.
- $\Box\Box P$ on $\mathbf{F}$-pätevä, missä $\mathbf{F} = \{\langle S, R \rangle\}$.

© 2004 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio



## Semantiikan perusominaisuudet

**Teoreema.** (Mahdollisten maailmojen semantiikan perusteoreema)
Jos $\mathbf{C}$ on joukko malleja, $\mathbf{C}$-pätevien lauseiden joukko

1. sisältää kaikki tautologiat;
2. sisältää kaikki muotoa $\Box(P \to Q) \to (\Box P \to \Box Q)$ olevat lauseet;
3. sisältää lauseen $Q$ aina, kun siihen kuuluvat $P$ ja $P \to Q$;
4. sisältää lauseen $\Box P$ aina, kun siihen kuuluu $P$;

ja jos $\mathbf{F}$ on joukko kehyksiä, $\mathbf{F}$-pätevien lauseiden joukko on suljettu sijoituksen suhteen.

© 2004 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio



## Semantiikan perusominaisuudet

**Todistus.** (1.) Mielivaltainen tautologia on tosi jokaisen mallin jokaisessa tilassa, joten se sisältyy $\mathbf{C}$-pätevien lauseiden joukkoon.

(2.) Olkoon $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$ mielivaltainen joukon $\mathbf{C}$ malli ja $s$ joukon $S$ tila. Tehdään vastaoletus, että jokin muotoa $\Box(P \to Q) \to (\Box P \to \Box Q)$ oleva lause ei ole tosi tilassa $s$. Tällöin (i) $\mathcal{M}, s \Vdash \Box(P \to Q)$, (ii) $\mathcal{M}, s \Vdash \Box P$ mutta (iii) $\mathcal{M}, s \not\Vdash \Box Q$.

Tällöin on olemassa $t \in S$, jolle $sRt$ ja $\mathcal{M}, t \not\Vdash Q$ (iii). Mutta nyt $\mathcal{M}, t \Vdash P \to Q$ ja $\mathcal{M}, t \Vdash P$ (i & ii), jolloin $\mathcal{M}, t \Vdash Q$, ristiriita. Näin ollen vastaoletus on väärä ja siis jokainen muotoa $\Box(P \to Q) \to (\Box P \to \Box Q)$ tosi $s$. Täten jokainen ko. muotoa oleva lause on $\mathbf{C}$-pätevä.

© 2004 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

(Todistus jatkuu.)

(3.) Olkoon $P$ ja $P \to Q$ $\mathbf{C}$-päteviä. Olkoon $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$ mielivaltainen joukon $\mathbf{C}$ malli ja $s$ joukon $S$ tila. Tällöin $P$ ja $P \to Q$ ovat tosia tilassa $s$, jolloin $Q$ on tosi tilassa $s$. Siis $Q$ on tosi jokaisen joukkoon $\mathbf{C}$ kuuluvan mallin jokaisessa tilassa, joten $Q$ on $\mathbf{C}$-pätevä.

(4.) Olkoon $P$ $\mathbf{C}$-pätevä ja olkoon $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$ mielivaltainen joukon $\mathbf{C}$ malli ja $s$ joukon $S$ tila. Tällöin kaikilla $t \in S$, joille $sRt$, $\mathcal{M}, t \Vdash P$ ja $\mathcal{M}, s \Vdash \Box P$. Täten $\Box P$ on $\mathbf{C}$-pätevä.

Osoitetaan vielä, että jos $\mathbf{F}$ on joukko kehyksiä, $\mathbf{F}$-pätevien lauseiden joukko on suljettu sijoituksen suhteen, t.s.

jos lause $X$ on $\mathbf{F}$-pätevä, niin lause $\sigma(X)$ on $\mathbf{F}$-pätevä, missä $\sigma(X)$ saadaan lauseesta $X$ sijoituksella $\sigma$, jossa lauseen $X$ kukin atomilause $P$, korvataan lauseella $\sigma(P)$ (huom. myös $\sigma(P) = P$ mahdollinen).

© 2004 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio



(Todistus jatkuu.)

Oletetaan, että $\sigma(X)$ ei ole $\mathbf{F}$-pätevä ja osoitetaan, että tällöin $X$ ei ole $\mathbf{F}$-pätevä.

Jos $\sigma(X)$ ei ole $\mathbf{F}$-pätevä, on olemassa $\langle S, R \rangle \in \mathbf{F}$, $v$ ja $t \in S$ s.e. $\mathcal{M}, t \nVdash \sigma(X)$, missä $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$.

Olkoon $\mathcal{M}' = \langle S, R, v' \rangle$, missä $v'(P, s) = \mathrm{true}$ joss $\mathcal{M}, s \Vdash \sigma(P)$.

Osoitetaan kaikilla lauseille $Z$ rakenteisella induktiolla, että kaikille tiloille $s \in S$ pätee: $\mathcal{M}', s \Vdash Z$ joss $\mathcal{M}, s \Vdash \sigma(Z)$.

- Jos $Z$ on atomilause, tällöin $\mathcal{M}', s \Vdash Z$ joss $v'(Z, s) = \mathrm{true}$ joss $\mathcal{M}, s \Vdash \sigma(Z)$.
- Jos $Z$ on muotoa $\top$ tai $\bot$, $\mathcal{M}', s \Vdash Z$ joss $\mathcal{M}, s \Vdash \sigma(Z)$.

© 2004 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio



(Todistus jatkuu.)

- Jos $Z$ on muotoa $\neg Z'$, niin $\mathcal{M}', s \Vdash \neg Z'$ joss $\mathcal{M}', s \nVdash Z'$. Induktio-oletuksen perusteella tämä pätee täsmälleen, kun $\mathcal{M}, s \nVdash \sigma(Z')$, joka pätee joss $\mathcal{M}, s \Vdash \neg\sigma(Z')[= \sigma(\neg Z')]$.
- Jos $Z$ on muotoa $Z' \to Z''$, niin $\mathcal{M}', s \Vdash Z' \to Z''$ joss $\mathcal{M}', s \nVdash Z'$ tai $\mathcal{M}', s \Vdash Z''$ joss $\mathcal{M}, s \nVdash \sigma(Z')$ tai $\mathcal{M}, s \Vdash \sigma(Z'')$ [IH] joss $\mathcal{M}, s \Vdash \sigma(Z') \to \sigma(Z'')[= \sigma(Z' \to Z'')]$.
- Jos $Z$ on muotoa $\Box Z'$, niin $\mathcal{M}', s \Vdash \Box Z'$ joss kaikille $t \in S$, joille $sRt$, pätee $\mathcal{M}', t \Vdash Z'$ joss kaikille $t \in S$, joille $sRt$, pätee $\mathcal{M}, t \Vdash \sigma(Z')$ [IH] joss $\mathcal{M}, s \Vdash \Box\sigma(Z')[= \sigma(\Box Z')]$.

Näin ollen jos $\mathcal{M}, t \nVdash \sigma(X)$, niin $\mathcal{M}', t \nVdash X$, joten $X$ ei ole $\mathbf{F}$-pätevä.■

© 2004 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio



## Normaalit modaalilogiikat

**Seurauslause.** Jos $\mathbf{L}$ on ei-tyhjä kehysten joukko, niin $\mathbf{L}$-pätevien lauseiden joukko on propositionaalinen modaalilogiikka.

Merkintää $\mathbf{L}$ voidaan käyttää kahdessa merkityksessä:

(1) kehysjoukko ja (2) kehysjoukossa pätevien lauseiden joukko.

**Määritelmä.** Propositionaalista modaalilogiikkaa sanotaan normaaliksi, jos se sisältää (i) kaikki muotoa $\Box(P \to Q) \to (\Box P \to \Box Q)$ olevat lauseet ja (ii) lauseen $\Box P$ aina, kun siihen kuuluu $P$.

**Määritelmä.** Lausejoukkoa $\mathcal{L}$ sanotaan *kehyslogiikaksi*, jos $\mathcal{L}$ on $\mathbf{L}$-pätevien lauseiden joukko jollekin ei-tyhjälle kehysten joukolle $\mathbf{L}$.

Samaa merkintää $\mathbf{L}$ voidaan käyttää sekä logiikasta että vastaavasta kehysjoukosta.

© 2004 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio