



Modaalilogiikan perusteet

Aluksi käsitellään modaalilogiikoita, joissa on modaalioperaattori \Box ja sen duaalioperaattori \Diamond ($\neg\Box\neg$).

Modaalioperaattorit voidaan luonnolliselle kielelle tulkita monella eri tavalla:

$\Box P$	$\Diamond P$
välttämättä P	mahdollisesti P
aina tulevaisuudessa P	
aina menneisyydessä P	
pitäisi olla P	
tiedetään että P	
uskotaan että P	



Tautologiat

Jos lause Q saadaan lauseesta P korvaamalla P :n atomilauseet uusilla lauseilla järjestelmällisesti, sanotaan, että Q saadaan P :stä *sijoittamalla*.

Lauseita, jotka saadaan sijoittamalla lauselogiikan pätevistä lauseista (tautologioista), sanotaan *klassisiksi tautologioiksi*.

Esim. Lause

$$(\Box\Box P \rightarrow (R \rightarrow \Box S)) \rightarrow (\Box\Box P \rightarrow (R \rightarrow \Box S))$$

on klassinen tautologia, joka on saatu lauselogiikan tautologiasta $P \rightarrow P$ korvaamalla P lauseella $(\Box\Box P \rightarrow (R \rightarrow \Box S))$



Modaalilogiikan syntaksi

Olkoon annettuna atomilauseiden joukko $\Phi = \{p_1, p_2, \dots\}$.

Propositionaaliset modaalilauseet:

- Atomilauseet ovat *lauseita*.
- \top ja \perp ovat *lauseita*.
- Jos P ja Q ovat lauseita, niin myös $\neg P$, $(P \rightarrow Q)$, $\Box P$ ovat *lauseita*.
- Muita *lauseita* ei ole.

Huom! Lyhennysmerkinnät:

$$\begin{aligned} \Diamond P &\Leftrightarrow_{\text{def}} \neg\Box\neg P & P \vee Q &\Leftrightarrow_{\text{def}} \neg P \rightarrow Q \\ P \wedge Q &\Leftrightarrow_{\text{def}} \neg(P \rightarrow \neg Q) & P \leftrightarrow Q &\Leftrightarrow_{\text{def}} \neg((P \rightarrow Q) \rightarrow \neg(Q \rightarrow P)) \end{aligned}$$



Tautologiat

Klassiset tautologiat voidaan tunnistaa esim. lauselogiikan taulumenetelmällä:

Rakennetaan taulu lauseen negaatiolle pitämällä modaalioperaattorilla alkavia lauseita atomisina (niihin ei sovelleta taulusääntöjä). Jos taulu sulkeutuu, kyseessä on klassinen tautologia.

Esimerkki. Osoitetaan, että

$$\begin{aligned} &(\Box\neg\Box(P \rightarrow Q) \wedge \Box(\neg P \wedge \neg Q)) \rightarrow \\ &(\Box\neg\Box(P \rightarrow Q) \vee \Box(\neg P \wedge \neg Q)) \end{aligned}$$

on klassinen tautologia.

- $\neg((\Box\neg\Box(P \rightarrow Q) \wedge \Box(\neg P \wedge \neg Q)) \rightarrow (\Box\neg\Box(P \rightarrow Q) \vee \Box(\neg P \wedge \neg Q)))$
- $\Box\neg\Box(P \rightarrow Q) \wedge \Box(\neg P \wedge \neg Q)$ (1)
- $\neg(\Box\neg\Box(P \rightarrow Q) \vee \Box(\neg P \wedge \neg Q))$ (1)
- $\Box\neg\Box(P \rightarrow Q)$ (2)
- $\Box(\neg P \wedge \neg Q)$ (2)
- $\neg\Box\neg\Box(P \rightarrow Q)$ (3)

×

Logiikka = (pätevien) lauseiden joukko

Määritelmä. *Propositionaalinen modaalilogiikka* \mathcal{L} on joukko propositionaalisia modaalilauseita siten, että

1. kaikki (klassiset) tautologiat kuuluvat joukkoon \mathcal{L} ;
2. \mathcal{L} on suljettu modus ponensin suhteen (jos $P \in \mathcal{L}$ ja $P \rightarrow Q \in \mathcal{L}$, niin $Q \in \mathcal{L}$);
3. \mathcal{L} on suljettu sijoituksen suhteen ($P \in \mathcal{L}$ ja Q saadaan sijoittamalla lauseesta P , niin $Q \in \mathcal{L}$).

Esim.

- (1) Klassiset tautologiat ovat modaalilogiikka.
- (2) Kaikkien propositionaalisten modaalilauseiden joukko on modaalilogiikka.

Toteutusrelaatio

Relaatio $\mathcal{M}, s \Vdash P$, joka kertoo onko lause P tosi mallin \mathcal{M} maailmassa s , määritellään seuraavasti.

Määritelmä. Olkoon $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$ malli.

1. $\mathcal{M}, s \Vdash P$ joss $v(s, P) = \text{true}$, kun P on atomilause.
2. $\mathcal{M}, s \not\Vdash \perp$ ja $\mathcal{M}, s \Vdash \top$.
3. $\mathcal{M}, s \Vdash \neg P$ joss $\mathcal{M}, s \not\Vdash P$.
4. $\mathcal{M}, s \Vdash P \rightarrow Q$ joss $\mathcal{M}, s \not\Vdash P$ tai $\mathcal{M}, s \Vdash Q$.
5. $\mathcal{M}, s \Vdash \Box P$ joss $\mathcal{M}, t \Vdash P$ kaikille $t \in S$ joille sRt .

Huom! $\mathcal{M}, s \Vdash \Diamond P$ joss $\mathcal{M}, t \Vdash P$ jollekin $t \in S$ jolle sRt .

Toinen paljon käytetty merkintätapa: $\mathcal{M}, s \models P$

Mahdollisten maailmojen semantiikka

(a.k.a. Kripke-semantiikka)

Määritelmä. *Kehys* on pari $\mathcal{F} = \langle S, R \rangle$, missä S on ei-tyhjä joukko ja R on relaatio $R \subseteq S \times S$.

Joukon S alkiot ovat *mahdollisia maailmoja* ja R on maailmojen välinen saavutettavuusrelaatio: jos $s_1 R s_2$, niin s_2 on saavutettavissa s_1 :stä.

Määritelmä. *Valuaatio* kehyksessä $\langle S, R \rangle$ on funktio v , joka kuvaa mahdolliset maailmat ja atomilauseet totuusarvoille (kaikille $s \in S$ ja atomilauseille P , $v(s, P)$ on joko true tai false).

(Toinen tapa: $v : S \mapsto 2^\Phi$; $v(s)$ on tilassa s tosien atomilauseiden joukko).

Määritelmä. *Malli* on kolmikko $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$, missä $\langle S, R \rangle$ on kehys ja v valuaatio tässä kehyksessä. $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$ *perustuu kehykseen* $\langle S, R \rangle$.

Toteutusrelaatio

Esimerkki. Olkoon $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$ missä

$$S = \{s, t\}$$

$$R = \{\langle s, t \rangle\}$$

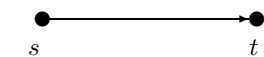
$$v(s, P) = \text{true}, v(t, P) = \text{false}$$

$$\text{(tai } v(s) = \{P\}, v(t) = \{\})$$

\mathcal{M} :

$\{P\}$

$\{\}$



- $\mathcal{M}, s \not\Vdash \Box P$.
- $\mathcal{M}, t \Vdash \Box P$.
- $\mathcal{M}, s \Vdash \Diamond \neg P$.
- $\mathcal{M}, s \Vdash \Box P \rightarrow P$.
- $\mathcal{M}, t \not\Vdash \Box P \rightarrow P$.



Pätevyys

Määritelmä.

- Lause P on **tos**i mallin $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$ maailmassa s joss $\mathcal{M}, s \models P$.
- Lause P on **pätevä mallissa** $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$, joss P on tosi mallin jokaisessa maailmassa. ($\mathcal{M} \models P$)
- Lause P on **pätevä mallien joukossa** \mathbf{C} , joss P on pätevä jokaisessa \mathbf{C} :n mallissa. ($\mathbf{C} \models P$)
- Lause P on **pätevä kehysten joukossa** \mathbf{F} , joss P on pätevä \mathbf{F} :n kehyksiin perustuvien mallien joukossa. ($\mathbf{F} \models P$)

☞ Jos P on pätevä joukossa \mathbf{C} (\mathbf{F}), sanomme, että P on **C-pätevä** (**F-pätevä**).



Semantiikan perusominaisuudet

Teoreema. (Mahdollisten maailmojen semantiikan perusteoreema)

Jos \mathbf{C} on joukko malleja, \mathbf{C} -pätevien lauseiden joukko

1. sisältää kaikki tautologiat;
2. sisältää kaikki muotoa $\Box(P \rightarrow Q) \rightarrow (\Box P \rightarrow \Box Q)$ olevat lauseet;
3. sisältää lauseen Q aina, kun siihen kuuluvat P ja $P \rightarrow Q$;
4. sisältää lauseen $\Box P$ aina, kun siihen kuuluu P ;

ja jos \mathbf{F} on joukko kehyksiä, \mathbf{F} -pätevien lauseiden joukko on suljettu sijoituksen suhteen.



Pätevyys

Esimerkki. Olkoon $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$ missä $S = \{s, t\}$, $R = \{\langle s, t \rangle\}$ ja $v(s, P) = \text{true}$, $v(t, P) = \text{false}$.

- $\Box P \rightarrow P$ ei ole pätevä \mathcal{M} :ssä.
 $\mathcal{M}, t \not\models \Box P \rightarrow P$.
- $P \vee \Box P$ on pätevä \mathcal{M} :ssä.
- $\Box \Box P$ on **F-pätevä**, missä $\mathbf{F} = \{\langle S, R \rangle\}$.



Semantiikan perusominaisuudet

Todistus. (1.) Mielivaltainen tautologia on tosi jokaisen mallin jokaisessa tilassa, joten se sisältyy \mathbf{C} -pätevien lauseiden joukkoon.

(2.) Olkoon $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$ mielivaltainen joukon \mathbf{C} malli ja s joukon S tila. Tehdään vastaoletus, että jokin muotoa $\Box(P \rightarrow Q) \rightarrow (\Box P \rightarrow \Box Q)$ oleva lause ei ole tosi tilassa s . Tällöin (i) $\mathcal{M}, s \models \Box(P \rightarrow Q)$, (ii) $\mathcal{M}, s \models \Box P$ mutta (iii) $\mathcal{M}, s \not\models \Box Q$.

Tällöin on olemassa $t \in S$, jolle sRt ja $\mathcal{M}, t \not\models Q$ (iii). Mutta nyt $\mathcal{M}, t \models P \rightarrow Q$ ja $\mathcal{M}, t \models P$ (i & ii), jolloin $\mathcal{M}, t \models Q$, ristiriita. Näin ollen vastaoletus on väärä ja siis jokainen muotoa $\Box(P \rightarrow Q) \rightarrow (\Box P \rightarrow \Box Q)$ tosi s . Täten jokainen ko. muotoa oleva lause on **C-pätevä**.



(Todistus jatkuu.)

(3.) Olkoon P ja $P \rightarrow Q$ \mathbf{C} -päteviä. Olkoon $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$ mielivaltainen joukon \mathbf{C} malli ja s joukon S tila. Tällöin P ja $P \rightarrow Q$ ovat tosia tilassa s , jolloin Q on tosi tilassa s . Siis Q on tosi jokaisen joukkoon \mathbf{C} kuuluvan mallin jokaisessa tilassa, joten Q on \mathbf{C} -pätevä.

(4.) Olkoon P \mathbf{C} -pätevä ja olkoon $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$ mielivaltainen joukon \mathbf{C} malli ja s joukon S tila. Tällöin kaikilla $t \in S$, joille sRt , $\mathcal{M}, t \Vdash P$ ja $\mathcal{M}, s \Vdash \Box P$. Täten $\Box P$ on \mathbf{C} -pätevä.

Osoitetaan vielä, että jos \mathbf{F} on joukko kehyksiä, \mathbf{F} -pätevien lauseiden joukko on suljettu sijoituksen suhteen, t.s.

jos lause X on \mathbf{F} -pätevä, niin lause $\sigma(X)$ on \mathbf{F} -pätevä, missä $\sigma(X)$ saadaan lauseesta X sijoituksella σ , jossa lauseen X kukin atomilause P , korvataan lauseella $\sigma(P)$ (huom. myös $\sigma(P) = P$ mahdollinen).



(Todistus jatkuu.)

- Jos Z on muotoa $\neg Z'$, niin $\mathcal{M}', s \Vdash \neg Z'$ joss $\mathcal{M}', s \not\Vdash Z'$. Induktio-oletuksen perusteella tämä pätee täsmälleen, kun $\mathcal{M}, s \not\Vdash \sigma(Z')$, joka pätee joss $\mathcal{M}, s \Vdash \neg \sigma(Z') [= \sigma(\neg Z')]$.
- Jos Z on muotoa $Z' \rightarrow Z''$, niin $\mathcal{M}', s \Vdash Z' \rightarrow Z''$ joss $\mathcal{M}', s \not\Vdash Z'$ tai $\mathcal{M}', s \Vdash Z''$ joss $\mathcal{M}, s \not\Vdash \sigma(Z')$ tai $\mathcal{M}, s \Vdash \sigma(Z'')$ [IH] joss $\mathcal{M}, s \Vdash \sigma(Z') \rightarrow \sigma(Z'') [= \sigma(Z' \rightarrow Z'')]$.
- Jos Z on muotoa $\Box Z'$, niin $\mathcal{M}', s \Vdash \Box Z'$ joss kaikille $t \in S$, joille sRt , pätee $\mathcal{M}', t \Vdash Z'$ joss kaikille $t \in S$, joille sRt , pätee $\mathcal{M}, t \Vdash \sigma(Z')$ [IH] joss $\mathcal{M}, s \Vdash \Box \sigma(Z') [= \sigma(\Box Z')]$.

Näin ollen jos $\mathcal{M}, t \not\Vdash \sigma(X)$, niin $\mathcal{M}', t \not\Vdash X$, joten X ei ole \mathbf{F} -pätevä. ■



(Todistus jatkuu.)

Oletetaan, että $\sigma(X)$ ei ole \mathbf{F} -pätevä ja osoitetaan, että tällöin X ei ole \mathbf{F} -pätevä.

Jos $\sigma(X)$ ei ole \mathbf{F} -pätevä, on olemassa $\langle S, R \rangle \in \mathbf{F}$, v ja $t \in S$ s.e. $\mathcal{M}, t \not\Vdash \sigma(X)$, missä $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$.

Olkoon $\mathcal{M}' = \langle S, R, v' \rangle$, missä $v'(P, s) = \text{true}$ joss $\mathcal{M}, s \Vdash \sigma(P)$.

Osoitetaan kaikilla lauseille Z rakenteisella induktiolla, että kaikille tiloille $s \in S$ pätee: $\mathcal{M}', s \Vdash Z$ joss $\mathcal{M}, s \Vdash \sigma(Z)$.

- Jos Z on atomilause, tällöin $\mathcal{M}', s \Vdash Z$ joss $v'(Z, s) = \text{true}$ joss $\mathcal{M}, s \Vdash \sigma(Z)$.
- Jos Z on muotoa \top tai \perp , $\mathcal{M}', s \Vdash Z$ joss $\mathcal{M}, s \Vdash \sigma(Z)$.



Normaalit modaalilogiikat

Seurauslause. Jos \mathbf{L} on ei-tyhjä kehysten joukko, niin \mathbf{L} -pätevien lauseiden joukko on propositionaalinen modaalilogiikka.

Merkintää \mathbf{L} voidaan käyttää kahdessa merkityksessä:

(1) kehysjoukko ja (2) kehysjoukossa pätevien lauseiden joukko.

Määritelmä. Propositionaalista modaalilogiikkaa sanotaan normaaliksi, jos se sisältää (i) kaikki muotoa $\Box(P \rightarrow Q) \rightarrow (\Box P \rightarrow \Box Q)$ olevat lauseet ja (ii) lauseen $\Box P$ aina, kun siihen kuuluu P .

Määritelmä. Lausejoukkoa \mathcal{L} sanotaan *kehyslogiikaksi*, jos \mathcal{L} on \mathbf{L} -pätevien lauseiden joukko jollekin ei-tyhjälle kehysten joukolle \mathbf{L} .

Samaa merkintää \mathbf{L} voidaan käyttää sekä logiikasta että vastaavasta kehysjoukosta.