Ratkaisumenetelmät

- Temporaalilogiikat (CTL/LTL) ratkevia, koska niillä on äärellisen mallin ominaisuus (vastamallin koolle yläraja), mutta tehokkaampia ratkaisumenetelmiä saadaan taulujen ja automaattiteorian avulla.
- Taulumenetelmä (esim. CTL)
  (i) Rakennetaan tutkittavalle lauseelle taulugraafi, joka sisältää (oleellisesti) kaikki lauseen mahdolliset mallit.
  (ii) Karsitaan taulua ja tarkastetaan, jäikö siihen ko. lauseen malleja.
- Automaattiteoreettinen menetelmä (esim. LTL)
  (i) Rakennetaan tutkittavalle lauseelle äärellistilainen (Büchi-) automaatti, joka hyväksyy äärettömän pitkiä sanoja (polkuja) siten, että automaatti hyväksyy (oleellisesti) kaikki lauseen toteuttavat täydet polut.
  (ii) Tarkistetaan, onko automaatin hyväksymä kieli tyhjä.

Taulumenetelmä CTL:lle

CTL:n taulu on bipartiitti graafi, jossa on solmut ovat lausejoukkoja ja niitä on kahdentyyppisiä: OR-solmuja ja AND-solmuja.

Lauseelle P taulu rakennetaan muuntamalla P ensin *positiiviseen normaalimuotoon* (jossa negaatiot esiintyvät vain atomilauseiden edessä) ja etenemällä sitten kahdessa vaiheessa:

(i) rakennetaan alustava taulu T_0 ja

(ii) muodostetaan lopullinen taulu T_1 karsintasäännöillä taulusta T_0.

Positiivinen normaalimuoto

CTL-lause muunnetaan positiiviseen normaalimuotoon seuraavilla säännöillä:

$P \rightarrow Q$	$\mapsto$	$\neg P \vee Q$	$\neg\mathbf{A}(P\mathbf{U}Q)$	$\mapsto$	$\mathbf{E}(\neg P\mathbf{B}Q)$
$\neg(P \vee Q)$	$\mapsto$	$\neg P \wedge \neg Q$	$\neg\mathbf{E}(P\mathbf{U}Q)$	$\mapsto$	$\mathbf{A}(\neg P\mathbf{B}Q)$
$\neg(P \wedge Q)$	$\mapsto$	$\neg P \vee \neg Q$	$\neg\mathbf{A}(P\mathbf{B}Q)$	$\mapsto$	$\mathbf{E}(\neg P\mathbf{U}Q)$
$\neg\neg P$	$\mapsto$	P	$\neg\mathbf{E}(P\mathbf{B}Q)$	$\mapsto$	$\mathbf{A}(\neg P\mathbf{U}Q)$
$\neg\mathbf{AG}P$	$\mapsto$	$\mathbf{EF}\neg P$			
$\neg\mathbf{EF}P$	$\mapsto$	$\mathbf{AG}\neg P$			
$\neg\mathbf{EG}P$	$\mapsto$	$\mathbf{AF}\neg P$			
$\neg\mathbf{AF}P$	$\mapsto$	$\mathbf{EG}\neg P$			
$\neg\mathbf{AX}P$	$\mapsto$	$\mathbf{EX}\neg P$			
$\neg\mathbf{EX}P$	$\mapsto$	$\mathbf{AX}\neg P$			

Huom! Lyhennysmerkinnät:

$\mathbf{A}(P\mathbf{B}Q)$: $\neg\mathbf{E}((\neg P)\mathbf{U}Q)$

$\mathbf{E}(P\mathbf{B}Q)$: $\neg\mathbf{A}((\neg P)\mathbf{U}Q)$

Positiivinen normaalimuoto (II)

- Positiivisessa normaalimuodossa käytetään konnektiiveja $\wedge, \vee$ ja negaatioita esiintyy vain atomilauseiden edessä.
- Merkintä $\sim P$: lauseen $\neg P$ positiivinen normaalimuoto.

Esimerkki.

$\sim\mathbf{AG}(R \rightarrow (\neg Q \wedge \mathbf{A}(P\mathbf{U}Q))) : \mathbf{EF}(R \wedge (Q \vee \mathbf{E}(\neg P\mathbf{B}Q)))$

koska $\neg\mathbf{AG}(R \rightarrow (\neg Q \wedge \mathbf{A}(P\mathbf{U}Q)))$

$\mapsto \mathbf{EF}\neg(\neg R \vee (\neg Q \wedge \mathbf{A}(P\mathbf{U}Q)))$

$\mapsto \mathbf{EF}(R \wedge \neg(\neg Q \wedge \mathbf{A}(P\mathbf{U}Q)))$

$\mapsto \mathbf{EF}(R \wedge (Q \vee \neg\mathbf{A}(P\mathbf{U}Q)))$

$\mapsto \mathbf{EF}(R \wedge (Q \vee \mathbf{E}(\neg P\mathbf{B}Q)))$

Alustava taulu

Alustavan taulun T_0 muodostaminen:

- Aloitetaan OR-solmusta $D_0 = \{P\}$.
- OR-solmun D seuraajat ovat AND-solmuja, jotka saadaan soveltamalla *α/β-sääntöjä* solmuun D.
- AND-solmun C seuraajat ovat OR-solmuja, jotka saadaan *seuraajasäännöllä* solmusta C.
- Huom! Jos OR-solmun D seuraaja (lausejoukko) C esiintyy jo taulussa, ei tauluun tule toista kopiota, vaan D:n seuraajaksi tulee jo olemassa oleva solmu C. Samoin AND-solmuille.

  $\boxed{\Rightarrow}$ Taulu äärellinen

OR-solmun seuraajat

OR-solmun D seuraajat ovat D:sta seuraavilla *α- ja β-säännöillä* saatavat alaspäin suljetut joukot.

Joukko C on alaspäin suljettu, kun seuraavat kaksi ehtoa toteutuvat:

(i) Jos $\alpha \in C$, $\alpha_1 \in C$ ja $\alpha_2 \in C$.

(ii) Jos $\beta \in C$, $\beta_1 \in C$ tai $\beta_2 \in C$.

α-säännöt:

$$\frac{P \wedge Q}{\begin{array}{c} P \\ Q \end{array}} \qquad \frac{\mathbf{AG}P}{\begin{array}{c} P \\ \mathbf{AXAG}P \end{array}} \qquad \frac{\mathbf{EG}P}{\begin{array}{c} P \\ \mathbf{EXEG}P \end{array}}$$

$$\frac{\mathbf{A}(P\mathbf{B}Q)}{\begin{array}{c} \sim Q \\ P \vee \mathbf{AXA}(P\mathbf{B}Q) \end{array}} \qquad \frac{\mathbf{E}(P\mathbf{B}Q)}{\begin{array}{c} \sim Q \\ P \vee \mathbf{EXE}(P\mathbf{B}Q) \end{array}}$$

OR-solmun seuraajat (II)

β-säännöt:

$$\frac{P \vee Q}{P \mid Q} \qquad \frac{\mathbf{AF}P}{P \mid \mathbf{AXAF}P} \qquad \frac{\mathbf{EF}P}{P \mid \mathbf{EXEF}P}$$

$$\frac{\mathbf{A}(P\mathbf{U}Q)}{Q \mid P \wedge \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q)} \qquad \frac{\mathbf{E}(P\mathbf{U}Q)}{Q \mid P \wedge \mathbf{EXE}(P\mathbf{U}Q)}$$

Huom! Literaaleille sekä $\mathbf{AX}P$- ja $\mathbf{EX}P$-lauseille ei sääntöjä.

OR-solmun seuraajat (II)

Esimerkki.

Olkoon $D = \{\mathbf{AFEF}((P \wedge Q) \vee R)\}$

D:sta saatavat alaspäin suljetut joukot ovat:

$C_1 = \{\mathbf{AFEF}((P \wedge Q) \vee R), \mathbf{EF}((P \wedge Q) \vee R), (P \wedge Q) \vee R, P \wedge Q, P, Q\}$

$C_2 = \{\mathbf{AFEF}((P \wedge Q) \vee R), \mathbf{EF}((P \wedge Q) \vee R), (P \wedge Q) \vee R, R\}$

$C_3 = \{\mathbf{AFEF}((P \wedge Q) \vee R), \mathbf{EF}((P \wedge Q) \vee R), \mathbf{EXEF}((P \wedge Q) \vee R)\}$

$C_4 = \{\mathbf{AFEF}((P \wedge Q) \vee R), \mathbf{AXAFEF}((P \wedge Q) \vee R)\}$

(Alaspäin suljetut joukot voidaan rakentaa lauselogiikan taulumenetelmän tapaan.)

AND-solmun seuraajat

AND-solmun C seuraajat saadaan *seuraajasäännöllä*:

Olkoon joukossa C seuraavatilalauseet:
$\mathbf{AX}P_1, \ldots, \mathbf{AX}P_l$,
$\mathbf{EX}Q_1, \ldots, \mathbf{EX}Q_k$.
Tällöin C:llä on seuraajat:
$D_1 = \{P_1, \ldots, P_l, Q_1\}, \ldots, D_k = \{P_1, \ldots, P_l, Q_k\}$
(Jos joukossa C ei ole muotoa $\mathbf{EX}Q_i$ olevia lauseita, joukolla on yksi seuraaja $\{P_1, \ldots, P_l\}$.)

Esimerkki. Olkoon
$C = \{\mathbf{A}(P\mathbf{U}Q), \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q), \mathbf{EG}P, P, \mathbf{EXEG}P, \mathbf{EF}Q, \mathbf{EXEF}Q\}$.
Tällöin C:n seuraajat ovat
$D_1 = \{\mathbf{A}(P\mathbf{U}Q), \mathbf{EG}P\}$ ja $D_2 = \{\mathbf{A}(P\mathbf{U}Q), \mathbf{EF}Q\}$.
(Huom! Kullakin AND-solmulla on ainakin yksi seuraaja.)

Karsintasäännöt

Alustavasta taulusta T_0 saadaan lopullinen taulu suorittamalla karsintaa seuraavilla säännöillä, kunnes mitään niistä ei voida soveltaa.

- Poistetaan AND-solmu, joka sisältää lauseen ja sen negaation.
- Poistetaan AND-solmu, jos yksikin sen alkuperäisistä seuraajista on poistettu.
- Poistetaan OR-solmu, jos kaikki sen alkuperäisistä seuraajista on poistettu.
- Poistetaan AND-solmu, jos jokin sen **tulevaisuuslause** ei toteudu tämän hetkisessä taulussa (mallintarkastus).

Tulevaisuuslauseita ovat seuraavaa muotoa olevat lauseet:

$\mathbf{E}(P\mathbf{U}Q)$, $\mathbf{EF}Q$, $\mathbf{A}(P\mathbf{U}Q)$, $\mathbf{AF}Q$

Karsintasäännöt (II)

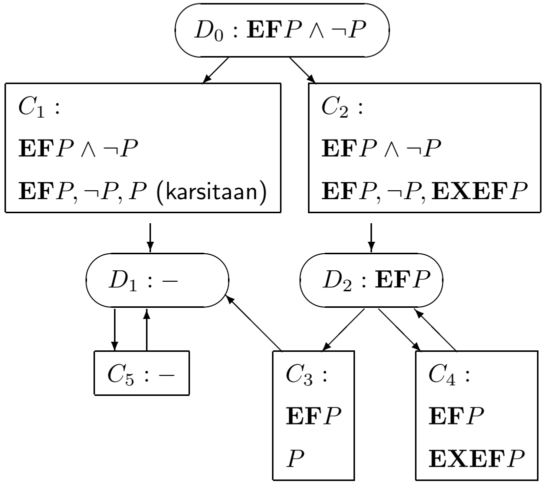
Tulevaisuuslauseiden toteutuminen taulussa määritellään seuraavasti:

- Tulevaisuuslause $\mathbf{EF}Q$ ($\mathbf{E}(P\mathbf{U}Q)$) toteutuu AND-solmussa C, joss taulusta löytyy solmusta C lähtevä polku AND-solmuun C', jossa on lause Q (ja polun kaikissa muissa AND-solmuissa on lause P).
- Tulevaisuuslause $\mathbf{AF}Q$ ($\mathbf{A}(P\mathbf{U}Q)$) toteutuu AND-solmussa C, joss taulusta löytyy asyklinen aligraafi, jolle pätee:
  (i) Aligraafin juuri on solmu C.
  (ii) Kullekin OR-sisäsolmulle täsmälleen yksi sen AND-seuraajasolmu on aligraafissa.
  (iii) Kullekin AND-sisäsolmulle kaikki sen OR-seuraajasolmut ovat mukana aligraafissa.
  (iv) Kaikissa aligraafin lehtisolmuissa on lause Q (ja kaikissa muissa AND-solmuissa P).

Esimerkki. Olkoon $D_0 = \{\mathbf{EF}P \wedge \neg P\}$.

- D_0:n AND-seuraajat:
  $C_1 = \{\mathbf{EF}P \wedge \neg P, \mathbf{EF}P, \neg P, P\}$ ja
  $C_2 = \{\mathbf{EF}P \wedge \neg P, \mathbf{EF}P, \neg P, \mathbf{EXEF}P\}$
- C_1:n OR-seuraajat: $D_1 = \{\}$ (Huom. väh. yksi seuraaja.)
  C_2:n OR-seuraajat: $D_2 = \{\mathbf{EF}P\}$
- D_2:n AND-seuraajat: $C_3 = \{\mathbf{EF}P, P\}$ ja $C_4 = \{\mathbf{EF}P, \mathbf{EXEF}P\}$
- D_1:n AND-seuraajat: $C_5 = \{\}$
- C_3:n OR-seuraajat: $\{\} = D_1$
  C_4:n OR-seuraajat: $\{\mathbf{EF}P\} = D_2$
  C_5:n OR-seuraajat: $\{\} = D_1$
- Alustava taulu T_0 on valmis.
- Karsinta: Poistetaan C_1 (lause ja negaatio). Lopullinen taulu T_1 valmis (tulevaisuuslause $\mathbf{EF}P$ toteutuu AND-solmuissa C_2, C_3, C_4).

(Esimerkki jatkuu.) Yleensä taulut tehdään graafin muotoon:



CTL-toteutuvuus taulуilla

Teoreema. Olkoon CTL-lause P positiivisessa normaalimuodossa. Tällöin P on toteutuva joss lopullisessa taulussa T_1 on AND-solmu, joka sisältää lauseen P.

- CTL-taulu antaa lauseen P mallin:
  Mallin tilat AND-solmuja ja valuaatio suoraan AND-solmun sisältämistä atomilauseista.
  Malliin mukaan ainakin yksi AND-solmu, joka sisältää lauseen P.
  Seuraajat valittava siten, että malli on sarjallinen ja että kaikkien mukaan tulevien AND-solmujen tulevaisuuslauseet toteutuvat.
- Huom! Taulumenetelmää voidaan käyttää ohjelmasynteesissä (muodostamaan järjestelmän ohjausrakenne):
  (i) Annetaan ohjelman määrittely CTL-lauseina.
  (ii) Haetaan taulumenetelmällä määrittelylle malli (antaa ohjelman ohjausrakenteen).

Esimerkki. Anna CTL-lauseelle $\mathbf{EF}P \wedge \neg P$ malli.

Muodostetaan malli $\langle S, R, v\rangle$ edellä annetusta taulusta T_1 esimerkiksi seuraavasti:

$S = \{C_2, C_3, C_5\}$, $R = \{\langle C_2, C_3\rangle, \langle C_3, C_5\rangle, \langle C_5, C_5\rangle\}$,
$v(P, s) = \mathrm{true}$, jos $s = C_3$, muutoin $v(P, s) = \mathrm{false}$.

Toinen vaihtoehto:

$S = \{C_2, C_3, C_4, C_5\}$, $R = \{\langle C_2, C_4\rangle, \langle C_4, C_3\rangle, \langle C_3, C_5\rangle, \langle C_5, C_5\rangle\}$,
$v(P, s) = \mathrm{true}$, jos $s = C_3$, muutoin $v(P, s) = \mathrm{false}$.

Huom! Esimerkiksi malli, jossa
$S = \{C_2, C_4\}$, $R = \{\langle C_2, C_4\rangle, \langle C_4, C_4\rangle\}$,
$v(P, C_2) = v(P, C_4) = \mathrm{false}$

ei kelpaa, koska solmujen C_2 ja C_4 tulevaisuuslause $\mathbf{EF}P$ ei toteudu tässä mallissa.

CTL-pätevyys tauluilla

- Lause on pätevä joss sen negaatio ei ole toteutuva.
- Toteutuvuus voidaan selvittää taulumenetelmällä:
  (i) Muodostetaan lauseen φ negaation positiivinen normaalimuoto $\sim\varphi$.
  (ii) Rakennetaan taulu lauseelle $\sim\varphi$.
- φ on pätevä joss
  $\sim\varphi$ ei ole toteutuva joss
  lopullisessa taulussa ei ole yhtään AND-solmua, joka sisältää lauseen $\sim\varphi$.

Esimerkki. Onko CTL-lause φ:

$\mathbf{EX}(P \vee Q) \rightarrow (\mathbf{EX}P \vee \mathbf{EX}Q)$

pätevä?

Lauseen $\neg\varphi$ positiivinen normaalimuoto $\sim\varphi$:

$\neg(\mathbf{EX}(P \vee Q) \rightarrow (\mathbf{EX}P \vee \mathbf{EX}Q)$

$\mapsto \quad \mathbf{EX}(P \vee Q) \wedge \neg(\mathbf{EX}P \vee \mathbf{EX}Q)$

$\mapsto \quad \mathbf{EX}(P \vee Q) \wedge (\neg\mathbf{EX}P \wedge \neg\mathbf{EX}Q)$

$\mapsto \quad \mathbf{EX}(P \vee Q) \wedge (\mathbf{AX}\neg P \wedge \mathbf{AX}\neg Q)$

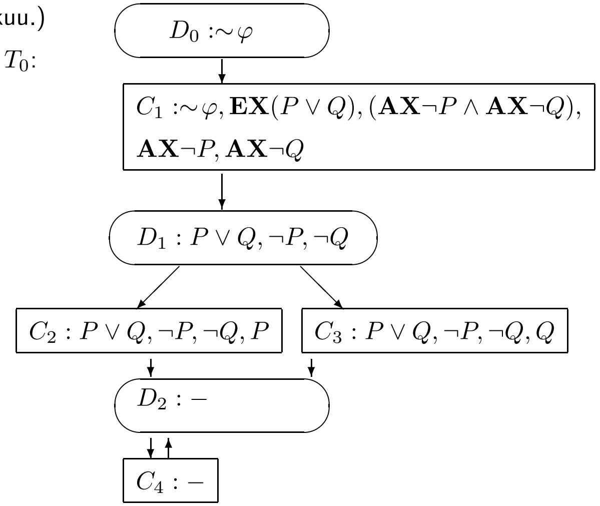
$\sim\varphi$: $\mathbf{EX}(P \vee Q) \wedge (\mathbf{AX}\neg P \wedge \mathbf{AX}\neg Q)$

(Esimerkki jatkuu.)
Taulu: $D_0 = \{\sim\varphi\}$.

- D_0:n AND-seuraajat:
  $C_1 = \{\sim\varphi, \mathbf{EX}(P \vee Q), (\mathbf{AX}\neg P \wedge \mathbf{AX}\neg Q), \mathbf{AX}\neg P, \mathbf{AX}\neg Q\}$
- C_1:n OR-seuraajat: $D_1 = \{P \vee Q, \neg P, \neg Q\}$
- D_1:n AND-seuraajat:
  $C_2 = D_1 \cup \{P\}$ ja $C_3 = D_1 \cup \{Q\}$
- C_2:n OR-seuraajat: $D_3 = \{\}$
  C_3:n OR-seuraajat: $\{\} = D_3$
  D_3:n AND-seuraajat: $C_4 = \{\}$
  C_4:n OR-seuraajat: $\{\} = D_3$
- Alustava taulu T_0 on valmis.

(Esimerkki jatkuu.)

Alustava taulu T_0:



(Esimerkki jatkuu.)

- Karsinta:
  (i) C_2, C_3 voidaan poistaa (sisältävät lauseen ja sen negaation)
  (ii) D_1 voidaan poistaa (ei seuraajia)
  (iii) C_1 voidaan poistaa (seuraaja poistettu)
  (iv) D_0 voidaan poistaa (ei seuraajia)

  Lopullinen taulu T_1 valmis.

  Taulussa T_1 ei ole AND-solmua, jossa esiintyy $\sim\varphi$.

  $\boxed{\Rightarrow}$ $\sim\varphi$ ei ole toteutuva. Siis φ on pätevä.

LTL-toteutuvuus taululla

CTL-taulut antavat menetelmän myös LTL-toteutuvuuden tarkastamiseen:

Teoreema. Olkoon LTL-lause P positiivisessa normaalimuodossa ja CTL-lause P' saatu siitä korvaamalla operaattorit $\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{X}, \mathbf{U}, \mathbf{B}$, operaattoreilla $\mathbf{AF}, \mathbf{AG}, \mathbf{AX}, \mathbf{AU}, \mathbf{AB}$. Tällöin P on LTL-toteutuva joss P' on CTL-toteutuva.

Esimerkki.
LTL-lause $\mathbf{G}(\neg P\mathbf{U}Q)$ on toteutuva joss
CTL-lause $\mathbf{AGA}(\neg P\mathbf{U}Q)$ on toteutuva.

Laskennallinen vaativuus

- CTL
  Mallintarkastus: $\mathbf{P}$-täydellinen
  $O(|M| \cdot |P|)$
  Toteutuvuus: **EXPTIME**-täydellinen
- LTL
  Mallintarkastus: **PSPACE**-täydellinen
  $O(|M| \cdot exp(|P|))$
  Toteutuvuus: **PSPACE**-täydellinen
- CTL*
  Mallintarkastus: **PSPACE**-täydellinen
  $O(|M| \cdot exp(|P|))$
  Toteutuvuus: 2**EXPTIME**-täydellinen

Tehokkaasti toteutettavia aliluokkia

- Toteutuvuusongelma ratkeaa polynomisessa ajassa esim. ohjelmasynteesin kannalta mielenkiintoisissa tapauksissa.
- Esim. SCTL (yksinkertaistettu CTL)
  $P_1 \vee \cdots \vee P_n$
  $\mathbf{AG}(P_1 \vee \cdots \vee P_n)$
  $\mathbf{AG}(P_0 \to \mathbf{AF}(P_1 \vee \cdots \vee P_n))$
  $\mathbf{AG}(P_0 \to \mathbf{A}(P_1 \vee \cdots \vee P_n\mathbf{U}Q_1 \vee \cdots \vee Q_m))$
  $\mathbf{AG}(P_0 \to \mathbf{AX}(P_1 \vee \cdots \vee P_n) \wedge$
  $\mathbf{EX}(Q_1 \vee \cdots \vee Q_m) \wedge \cdots \wedge \mathbf{EX}(R_1 \vee \cdots \vee R_l))$
  jossa ESC-oletus pätee: tulevaisuuslauseet eivät riipu historiasta.
- Esim. RLTL (rajoitettu LTL): $\mathbf{G}(P_1 \vee \cdots \vee P_n)$
  $\mathbf{G}(P_0 \to \mathbf{F}(P_1 \vee \cdots \vee P_n))$
  $\mathbf{G}(P_0 \to \mathbf{X}(P_1 \vee \cdots \vee P_n))$