



Johdantoa modaalilogiikkaan

- Käsitteiden välttämätön, aikominen, tietäminen, uskominen, tuleva, mennyt, todistuva, tosi tapahtuman jälkeen, ... logiikkaa
- Mitkä ovat ko. käsitteiden ominaisuudet?
Jos tiedät jotain, tiedätkö että tiedät sen?
Jos et tiedät jotain, tiedätkö ettet tiedät sitä?
Jos tiedät jotain, onko asia totta?
- Systemaattinen (Kripke/mahdollisten maailmojen) semantiikkaan perustuva lähestymistapa.



Äiti sanoo: "ainakin toisella on mutainen otsa".

$$A \vee B$$

$$K_a(A \vee B)$$

$$K_b(A \vee B)$$

$$K_a K_b(A \vee B) \quad (1)$$

Lapset näkevät toisensa.

$$K_a(K_b A \vee K_b \neg A) \quad (2)$$

Äiti kysyy: "tiedättekö, onko otsanne mutainen vai ei"? Molemmat vastaavat "en tiedä".

$$K_a \neg K_b B \quad (3)$$

Lauseista 1–3 seuraa $K_a A$.

Millä perusteella?



Esimerkki: Mutaiset lapset—tietämyslogiikka

- Kaksi lasta, joilla kummallakin mutainen otsa.
- Lapset näkevät toisensa.
- Äiti sanoo: "ainakin toisella on mutainen otsa".
- Äiti kysyy: "tiedättekö, onko otsanne mutainen vai ei"?
- Molemmat vastaavat "en tiedä".
- Äiti kysyy: "tiedättekö, onko otsanne mutainen vai ei"?
- Molemmat vastaavat: "tiedän otsani olevan mutainen".

Formalisointi: Lapset a ja b .

A : a :lla mutainen otsa / B : b :lla mutainen otsa

$K_a B$: a tietää, että b :lla on mutainen otsa.



Semanttinen tarkastelu

Miten esitetään tietämistä ja ei-tietämistä?

- Joukko lauselogiikan malleja (mahdollisia maailmoja).
- a tietää P :n ($K_a P$) joss P tosi kaikissa mahdollisissa maailmoissa. Esim. Olkoon a :n mahdollisten maailmojen joukko $\{\{P, Q\}, \{Q\}\}$. Tällöin $K_a Q$ on tosi, mutta $K_a P$ ei ole.

- Mitkä maailmat mahdollisia?

Formalisoidaan tietäminen seuraavasti:

Kussakin maailmassa s agentilla a on joukko a :n kannalta samanarvoisia mahdollisia maailmoja.

\Rightarrow Kaikkien maailmojen luokka jakaantuu agentin a kannalta kokoelmaksi erillisiä joukkoja mahdollisia maailmoja. Samoin b :n kannalta.



Osoitetaan, että lauseista 1–3 loogisesti seuraa $K_a A$, t.s. että jokaisessa tietämysmallin maailmassa, jossa lauseet 1–3 ovat totta, on $K_a A$ totta.

Olkoon S jokin a :n kannalta mahdollisten maailmojen joukko ja s eräs S :n maailma.

S jakaantuu erillisiin joukkoihin T_1, T_2, \dots b :n kannalta mahdollisia maailmoja.

- Lause (2) $K_a(K_b A \vee K_b \neg A)$ tosi s :ssä. Siis $(K_b A \vee K_b \neg A)$ tosi kaikissa S :n maailmoissa.
 - \Rightarrow Kaikille $i = 1, 2, \dots$ joko A on tosi kaikissa T_i :n maailmoissa tai A on epätosi kaikissa T_i :n maailmoissa.



- Lause (3) $K_a \neg K_b B$ tosi s :ssä. Siis $\neg K_b B$ tosi kaikissa S :n maailmoissa.
 - \Rightarrow Kaikille $i = 1, 2, \dots$ B on epätosi jossain T_i :n maailmassa.
 - \Rightarrow Kaikille $i = 1, 2, \dots$ A on tosi kaikissa T_i :n maailmoissa.
 - \Rightarrow A on tosi kaikissa S :n maailmoissa.
 - \Rightarrow $K_a A$ tosi s :ssä



- Lause (1) $K_a K_b (A \vee B)$ tosi s :ssä. Siis $K_b (A \vee B)$ tosi kaikissa S :n maailmoissa.
 - \Rightarrow Kaikille $i = 1, 2, \dots$ $A \vee B$ on tosi kaikissa T_i :n maailmoissa.
 - \Rightarrow Kaikille $i = 1, 2, \dots$ joko A on tosi kaikissa T_i :n maailmoissa tai B on tosi kaikissa T_i :n maailmoissa.



Syntaktinen tarkastelu

Mitä tietämiseen liittyviä periaatteita tarvitaan?

- **Prop. päättely:** tautologiat + MP: $\frac{P, P \rightarrow Q}{Q}$
- **Distributiivisuus:** $K_a(P \rightarrow Q) \rightarrow (K_a P \rightarrow K_a Q)$
- **N-sääntö:**

$$\frac{P}{K_a P}$$



• **R-sääntö:**

$$\frac{P \rightarrow Q}{K_a P \rightarrow K_a Q}$$

Huom! Johdettu sääntö:

1. $P \rightarrow Q$
2. $K_a(P \rightarrow Q)$ [N, 1]
3. $K_a(P \rightarrow Q) \rightarrow (K_a P \rightarrow K_a Q)$ [Distr]
4. $(K_a P \rightarrow K_a Q)$ [MP, 2,3]

• **T:** $K_a P \rightarrow P$



Lauseen $K_a A$ johto premiseistä 1–3 käyttäen edellä annettuja tietämiseen liittyviä periaatteita:

- | | |
|--|---|
| 1. $K_a K_b(\neg A \rightarrow B)$ [P1] | 9. $K_a(\neg K_b B \rightarrow \neg K_b \neg A)$ [MP, 6, 8] |
| 2. $K_a(\neg K_b \neg A \rightarrow K_b A)$ [P2] | 10. $K_a(\neg K_b B \rightarrow \neg K_b \neg A) \rightarrow$
$(K_a \neg K_b B \rightarrow K_a \neg K_b \neg A)$ [Distr] |
| 3. $K_a \neg K_b B$ [P3] | 11. $K_a \neg K_b B \rightarrow K_a \neg K_b \neg A$ [MP, 9, 10] |
| 4. $K_b(\neg A \rightarrow B) \rightarrow$
$(K_b \neg A \rightarrow K_b B)$ [Distr] | 12. $K_a \neg K_b \neg A$ [MP, 3, 11] |
| 5. $K_a K_b(\neg A \rightarrow B) \rightarrow$
$K_a(K_b \neg A \rightarrow K_b B)$ [R, 4] | 13. $K_a(\neg K_b \neg A \rightarrow K_b A) \rightarrow$
$(K_a \neg K_b \neg A \rightarrow K_a K_b A)$ [Distr] |
| 6. $K_a(K_b \neg A \rightarrow K_b B)$ [MP, 1, 5] | 14. $K_a \neg K_b \neg A \rightarrow K_a K_b A$ [MP, 2, 13] |
| 7. $(K_b \neg A \rightarrow K_b B) \rightarrow$
$(\neg K_b B \rightarrow \neg K_b \neg A)$ [Taut] | 15. $K_a K_b A$ [MP, 12, 14] |
| 8. $K_a(K_b \neg A \rightarrow K_b B) \rightarrow$
$K_a(\neg K_b B \rightarrow \neg K_b \neg A)$ [R, 7] | 16. $K_b A \rightarrow A$ [T] |
| | 17. $K_a K_b A \rightarrow K_a A$ [R, 16] |
| | 18. $K_a A$ [MP, 15, 17] |