

1. Olkoot A ja B atomilauseita. Osoita, että seuraavat lauseet eivät ole päteviä kaikissa kehyksissä (anna vastaesimerkki).

a) $\diamond A \rightarrow \Box A$

b) $\neg \Box A \rightarrow \Box \neg \Box A$

c) $\diamond(\diamond A \wedge \Box A) \rightarrow \Box \diamond A$

d) $(\diamond A \wedge \diamond B) \rightarrow \diamond(A \wedge B)$

2. Osoita, että millä tahansa lauseella A : $\diamond \top$ on pätevä mallissa, jos ja vain, jos $\Box A \rightarrow \diamond A$ on pätevä mallissa.

3. Osoita, että jos $\mathcal{M}' = (S', R', v')$ on $\mathcal{M} = (S, R, v)$:n generoitu alimalli niin jokaiselle lauseelle ϕ ja jokaisessa \mathcal{M}' :n maailmassa s :

$$\mathcal{M}, s \models \phi \text{ joss } \mathcal{M}', s \models \phi.$$

4. Etsi malli, jossa on neljä mahdollista maailmaa siten, että lause

$$\Box((\Box \Box A \rightarrow \diamond \Box A) \wedge \diamond \Box(\Box A \rightarrow \diamond A)) \rightarrow (\diamond(\Box A \rightarrow \Box A) \rightarrow ((\diamond A \wedge \Box \Box A) \vee \diamond \Box \Box \neg A))$$

on tosi jossakin mallin maailmassa, kun tiedetään, että lause on tosi mallin $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$ maailmassa s_4 , missä

$$S = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\},$$

$$R = \{\langle s_1, s_1 \rangle, \langle s_1, s_2 \rangle, \langle s_1, s_5 \rangle, \langle s_2, s_5 \rangle, \langle s_3, s_2 \rangle, \langle s_3, s_4 \rangle, \langle s_4, s_3 \rangle, \langle s_4, s_5 \rangle\}$$

ja $v(s_1, A) = v(s_2, A) = v(s_3, A) = \text{true}$, ja $v(s_4, A) = v(s_5, A) = \text{false}$.

5. Olkoon $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ ja $R = \{\langle s_1, s_2 \rangle, \langle s_2, s_3 \rangle, \langle s_3, s_4 \rangle, \langle s_4, s_1 \rangle\}$. Etsi kehys $\langle S', R' \rangle$, jossa on kaksi mahdollista maailmaa siten, että kaikille lauseille P pätee: jos P on pätevä kehyksessä $\langle S, R \rangle$, niin P on pätevä kehyksessä $\langle S', R' \rangle$.