T-79.146 **Kevät 2003**
Logiikka tietotekniikassa: erityiskysymyksiä I
Laskuharjoitus 9
Ratkaisut

1. Perusoperaattori

$$\mathcal{M}, s \models \mathbf{AX}P, \text{ joss } \mathcal{M}, t \models P \text{ kaikille } t, \text{ joille } sRt$$

Korvataan P $\neg P$:llä:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M}, s \models \mathbf{AX}\neg P, \text{ joss } \mathcal{M}, t \models \neg P \text{ kaikille } t, \text{ joille } sRt \\
&\mathcal{M}, s \not\models \mathbf{AX}\neg P, \text{ joss } \mathcal{M}, t \not\models \neg P \text{ jollekin } t, \text{ jolle } sRt \\
&\mathcal{M}, s \models \neg\mathbf{AX}\neg P, \text{ joss } \mathcal{M}, t \not\models \neg P \text{ jollekin } t, \text{ jolle } sRt \\
&\mathcal{M}, s \models \mathbf{EX}P, \text{ joss } \mathcal{M}, t \models P \text{ jollekin } t, \text{ jolle } sRt
\end{aligned}$$

Perusoperaattori

$\mathcal{M}, s \models \mathbf{A}(P\mathbf{U}Q)$, joss mallissa $\mathcal{M}$ kaikille täysille poluille $(s_0, s_1, \dots)$, $s_0 = s$, on olemassa i siten, että $\mathcal{M}, s_i \models Q$, ja kaikille $j < i$ pätee $\mathcal{M}, s_j \models P$

Tehdään korvaukset $P \to \top$, $Q \to P$:

$\mathcal{M}, s \models \mathbf{A}(\top\mathbf{U}P)$, joss mallissa $\mathcal{M}$ kaikille täysille poluille $(s_0, s_1, \dots)$, $s_0 = s$, on olemassa i siten, että $\mathcal{M}, s_i \models P$ ja kaikille $j < i$ pätee $\mathcal{M}, s_j \models \top$

$\mathcal{M}, s \models \mathbf{AF}P$, joss mallissa $\mathcal{M}$ kaikille täysille poluille $(s_0, s_1, \dots)$, $s_0 = s$, on olemassa i siten, että $\mathcal{M}, s_i \models P$

Perusoperaattori

$\mathcal{M}, s \models \mathbf{E}(P\mathbf{U}Q)$, joss mallissa $\mathcal{M}$ on olemassa täysi polku $(s_0, s_1, \dots)$, $s_0 = s$, ja on olemassa i siten, että $\mathcal{M}, s_i \models Q$ ja kaikille $j < i$ pätee $\mathcal{M}, s_j \models P$

Tehdään korvaukset $P \to \top$, $Q \to P$:

$\mathcal{M}, s \models \mathbf{E}(\top \mathbf{U} P)$, joss mallissa $\mathcal{M}$ on olemassa täysi polku $(s_0, s_1, \dots)$, $s_0 = s$, ja on olemassa i siten, että $\mathcal{M}, s_i \models P$ ja kaikille $j < i$ pätee $\mathcal{M}, s_j \models \top$

$\mathcal{M}, s \models \mathbf{EF}P$, joss mallissa $\mathcal{M}$ on olemassa täysi polku $(s_0, s_1, \dots)$, $s_0 = s$, ja on olemassa i siten, että $\mathcal{M}, s_i \models P$

$\mathcal{M}, s \models \mathbf{EF}P$, joss mallissa $\mathcal{M}$ on olemassa täysi polku $(s_0, s_1, \dots)$, $s_0 = s$, ja on olemassa i siten, että $\mathcal{M}, s_i \models P$

$\mathcal{M}, s \models \mathbf{EF}\neg P$, joss mallissa $\mathcal{M}$ on olemassa täysi polku $(s_0, s_1, \dots)$, $s_0 = s$, ja on olemassa i siten, että $\mathcal{M}, s_i \models \neg P$

$\mathcal{M}, s \not\models \mathbf{EF}\neg P$, joss mallissa $\mathcal{M}$ kaikille täysille poluille $(s_0, s_1, \dots)$, $s_0 = s$, ja kaikille i pätee $\mathcal{M}, s_i \not\models \neg P$

$\mathcal{M}, s \models \neg\mathbf{EF}\neg P$, joss mallissa $\mathcal{M}$ kaikille täysille poluille $(s_0, s_1, \dots)$, $s_0 = s$, ja kaikille i pätee $\mathcal{M}, s_i \not\models \neg P$

$\mathcal{M}, s \models \mathbf{AG}P$, joss mallissa $\mathcal{M}$ kaikille täysille poluille $(s_0, s_1, \dots)$, $s_0 = s$, ja kaikille i pätee $\mathcal{M}, s_i \models P$

$\mathcal{M}, s \models \mathbf{AF}P$, joss mallissa $\mathcal{M}$ kaikille täysille poluille $(s_0, s_1, \dots)$, $s_0 = s$, on olemassa i siten, että $\mathcal{M}, s_i \models P$

$\mathcal{M}, s \models \mathbf{AF}\neg P$, joss mallissa $\mathcal{M}$ kaikille täysille poluille $(s_0, s_1, \dots)$, $s_0 = s$, on olemassa i siten, että $\mathcal{M}, s_i \models \neg P$

$\mathcal{M}, s \not\models \mathbf{AF}\neg P$, joss mallissa $\mathcal{M}$ on olemassa täysi polku $(s_0, s_1, \dots)$, $s_0 = s$, siten, että kaikille i pätee $\mathcal{M}, s_i \not\models \neg P$

$\mathcal{M}, s \models \neg\mathbf{AF}\neg P$, joss mallissa $\mathcal{M}$ on olemassa täysi polku $(s_0, s_1, \dots)$, $s_0 = s$, siten, että kaikille i pätee $\mathcal{M}, s_i \not\models \neg P$

$\mathcal{M}, s \models \mathbf{EG}P$, joss mallissa $\mathcal{M}$ on olemassa täysi polku $(s_0, s_1, \dots)$, $s_0 = s$, siten, että kaikille i pätee $\mathcal{M}, s_i \models P$

2.

$\mathcal{M}, x \models P\mathbf{U}Q$, joss on olemassa i siten, että $\mathcal{M}, x^i \models Q$ ja kaikille $j < i$ pätee $\mathcal{M}, x^j \models P$

$\mathcal{M}, x \models \top\mathbf{U}P$, joss on olemassa i siten, että $\mathcal{M}, x^i \models P$ ja kaikille $j < i$ pätee $\mathcal{M}, x^j \models \top$

$\mathcal{M}, x \models \mathbf{F}P$, joss on olemassa i siten, että $\mathcal{M}, x^i \models P$

$\mathcal{M}, x \models \mathbf{F}P$, joss on olemassa i siten, että $\mathcal{M}, x^i \models P$
$\mathcal{M}, x \models \mathbf{F}\neg P$, joss on olemassa i siten, että $\mathcal{M}, x^i \models \neg P$
$\mathcal{M}, x \not\models \mathbf{F}\neg P$, joss kaikille i pätee $\mathcal{M}, x^i \not\models \neg P$
$\mathcal{M}, x \models \neg\mathbf{F}\neg P$, joss kaikille i pätee $\mathcal{M}, x^i \not\models \neg P$
$\mathcal{M}, x \models \mathbf{G}P$, joss kaikille i pätee $\mathcal{M}, x^i \models P$

$\mathcal{M}, x \models P\mathbf{U}Q$, joss on olemassa i siten, että $\mathcal{M}, x^i \models Q$ ja kaikille $j < i$ pätee $\mathcal{M}, x^j \models P$

$\mathcal{M}, x \models (\neg P)\mathbf{U}(\neg Q)$, joss on olemassa i siten, että $\mathcal{M}, x^i \models \neg Q$ ja kaikille $j < i$ pätee $\mathcal{M}, x^j \models \neg P$

$\mathcal{M}, x \not\models (\neg P)\mathbf{U}(\neg Q)$, joss kaikille i: joko $\mathcal{M}, x^i \not\models \neg Q$, tai on olemassa $j < i$ siten, että $\mathcal{M}, x^j \not\models \neg P$

$\mathcal{M}, x \models \neg\big((\neg P)\mathbf{U}(\neg Q)\big)$, joss kaikille i: jos $\mathcal{M}, x^i \models \neg Q$, niin silloin on olemassa $j < i$ siten, että $\mathcal{M}, x^j \not\models \neg P$

$\mathcal{M}, x \models P\mathbf{R}Q$, joss kaikille i: jos $\mathcal{M}, x^i \not\models Q$, niin silloin on olemassa $j < i$ siten, että $\mathcal{M}, x^j \models P$

3. Määritellään esim.

$$\begin{array}{ll} v(s_0, P) = \text{true} & v(s_0, Q) = \text{false} \\ v(s_1, P) = \text{false} & v(s_1, Q) = \text{true} \\ v(s_2, P) = \text{false} & v(s_2, Q) = \text{false}, \end{array}$$

jolloin saadaan malli

$$\begin{tikzcd} s_0 \arrow[r] & s_1 \arrow[r] & s_2 \arrow[loop above] \\ P, \neg Q & \neg P, Q & \neg P, \neg Q \end{tikzcd}$$

Nyt täydelle polulle $x = (s_0, s_1, s_2, s_2, s_2, \ldots)$ pätee

$$\mathcal{M}, x \models P\mathbf{U}Q, \text{ koska } \mathcal{M}, x^1 \models Q \text{ ja } \mathcal{M}, x^j \models P \text{ pätee kaikille } j < 1,$$

mutta $\mathcal{M}, x \not\models Q\mathbf{R}P$, koska $\mathcal{M}, x^1 \not\models P$, mutta ei ole olemassa sellaista $j < 1$, jolle pätisi $\mathcal{M}, x^j \models Q$.