T-79.146 **Kevät 2003**
Logiikka tietotekniikassa: erityiskysymyksiä I
Laskuharjoitus 5
Ratkaisut

Aksiooma K:

$$\text{K:}\quad \Box(P \to Q) \to (\Box P \to \Box Q)$$

Päättelysäännöt:

$$\text{MP:}\quad \frac{P, P \to Q}{Q}$$

$$\text{N:}\quad \frac{P}{\Box P}$$

1. a)

1.	$P \to (Q \to P)$	[Tautologia]
2.	$\Box\big(P \to (Q \to P)\big)$	[N, 1]
3.	$\Box\big(P \to (Q \to P)\big) \to \big(\Box P \to \Box(Q \to P)\big)$	[K]
4.	$\Box P \to \Box(Q \to P)$	[MP, 2, 3]

b)

1.	$\Box(P \to Q)$	[GP]
2.	$(P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)$	[Tautologia]
3.	$\Box\big((P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)\big)$	[N, 2]
4.	$\Box\big((P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)\big) \to$ $\big(\Box(P \to Q) \to \Box(\neg Q \to \neg P)\big)$	[K]
5.	$\Box(P \to Q) \to \Box(\neg Q \to \neg P)$	[MP, 3, 4]
6.	$\Box(\neg Q \to \neg P)$	[MP, 1, 5]
7.	$\Box(\neg Q \to \neg P) \to (\Box\neg Q \to \Box\neg P)$	[K]
8.	$\Box\neg Q \to \Box\neg P$	[MP, 6, 7]

2. Tämä tehtävä käsitellään seuraavissa laskuharjoituksissa.

3. a)

1.	$P \to Q$	[GP]
2.	$\neg Q \to P$	[GP]
3.	$(P \to Q) \to \big((\neg Q \to P) \to Q\big)$	[Tautologia]
4.	$(\neg Q \to P) \to Q$	[MP, 1, 3]
5.	Q	[MP, 2, 4]
6.	$\Box Q$	[N, 5]
7.	$\neg Q \vee S$	[LP]
8.	$(\neg Q \vee S) \to (Q \to S)$	[Tautologia]
9.	$Q \to S$	[MP, 7, 8]
10.	S	[MP, 5, 9]
11.	$\Box Q \to (S \to \Box Q \wedge S)$	[Tautologia]
12.	$S \to \Box Q \wedge S$	[MP, 6, 11]
13.	$\Box Q \wedge S$	[MP, 10, 12]

b)

1.	$Q \to \neg P$	[GP]
2.	$\Box(Q \to \neg P)$	[N, 1]
3.	$\Box(Q \to \neg P) \to (\Box Q \to \Box\neg P)$	[K]
4.	$\Box Q \to \Box\neg P$	[MP, 2, 3]
5.	$\Diamond Q \to \Box Q$	[GP]
6.	$(\Diamond Q \to \Box Q) \to$ $\big((\Box Q \to \Box\neg P) \to (\Diamond Q \to \Box\neg P)\big)$	[Tautologia]
7.	$(\Box Q \to \Box\neg P) \to (\Diamond Q \to \Box\neg P)$	[MP, 5, 6]
8.	$\Diamond Q \to \Box\neg P$	[MP, 4, 7]
9.	$(\neg\Box\neg Q \to \Box\neg P) \to (\neg\Box\neg P \to \Box\neg Q)$	[Tautologia]
10.	$\neg\Box\neg P \to \Box\neg Q$	[MP, 8, 9]
11.	$\Diamond P$	[LP]
12.	$\Box\neg Q$	[MP, 10, 11]

4. a) Huomataan, että

$$\Sigma \vdash \emptyset \Longrightarrow \neg\big(\top \wedge A \wedge B \wedge \neg(A \wedge B)\big),$$
$$\Sigma \vdash \emptyset \Longrightarrow \neg\big(\top \wedge \neg A \wedge (A \wedge B)\big)$$

ja

$$\Sigma \vdash \emptyset \Longrightarrow \neg\big(\top \wedge \neg B \wedge (A \wedge B)\big),$$

koska lauseet $\neg\big(\top\wedge A\wedge B\wedge\neg(A\wedge B)\big)$, $\neg\big(\top\wedge\neg A\wedge(A\wedge B)\big)$ ja $\neg\big(\top\wedge \neg B \wedge (A \wedge B)\big)$ ovat tautologioita. Siten lausejoukot $\{A, B, \neg(A \wedge B)\}$, $\{\neg A, (A \wedge B)\}$ ja $\{\neg B, (A \wedge B)\}$ ovat Σ-epäkonsistentteja.

Tarkastellaan Σ-maksimaalista lausejoukkoa Δ.

Oletetaan, että $A \in \Delta$ ja $B \in \Delta$, mutta $A \wedge B \notin \Delta$. Koska Δ on Σ-maksimaalinen, seuraa, että $\neg(A \wedge B) \in \Delta$. Nyt kuitenkin Δ:lla olisi Σ-epäkonsistentti osajoukko $\{A, B, \neg(A \wedge B)\}$, mikä on mahdotonta, koska Δ on Σ-konsistentti (jolloin myös sen kaikki osajoukot ovat Σ-konsistentteja). On siis oltava myös $A \wedge B \in \Delta$.

Jos taas olisi $A \wedge B \in \Delta$ ja $A \notin \Delta$ tai $B \notin \Delta$, niin silloin Δ:n Σ-maksimaalisuudesta seuraisi $\neg A \in \Delta$ tai $\neg B \in \Delta$, ja Δ:lla olisi Σ-epäkonsistentti osajoukko $\{\neg A, A \wedge B\}$ tai $\{\neg B, A \wedge B\}$, mikä on jälleen mahdotonta, koska Δ on Σ-konsistentti. On siis oltava $A \in \Delta$ ja $B \in \Delta$.

Yllä olevan perusteella todetaan, että $A \wedge B \in \Delta$ pätee, jos ja vain, jos sekä $A \in \Delta$ että $B \in \Delta$ ovat voimassa.

b) Todetaan, että

$$\Sigma \vdash \emptyset \Longrightarrow \neg\big(\top \wedge \neg A \wedge \neg(A \to B)\big),$$
$$\Sigma \vdash \emptyset \Longrightarrow \neg\big(\top \wedge B \wedge \neg(A \to B)\big),$$

ja

$$\Sigma \vdash \emptyset \Longrightarrow \neg\big(\top \wedge A \wedge \neg B \wedge (A \to B)\big),$$

koska nuolien oikealla puolella olevat lauseet ovat tautologioita. Seuraa siis, että lausejoukot $\{\neg A, \neg(A \to B)\}$, $\{B, \neg(A \to B)\}$ ja $\{A, \neg B, A \to B\}$ ovat Σ-epäkonsistentteja. Nyt tulos

$$A \to B \in \Delta \text{ joss } A \notin \Delta \text{ tai } B \in \Delta$$

voidaan todistaa vastaavalla tavalla kuin a-kohdassa.

c) Vastaavasti

$$\Sigma \vdash \emptyset \Longrightarrow \neg\big(\top \wedge A \wedge \neg(A \vee B)\big),$$
$$\Sigma \vdash \emptyset \Longrightarrow \neg\big(\top \wedge B \wedge \neg(A \vee B)\big),$$

ja

$$\Sigma \vdash \emptyset \Longrightarrow \neg\big(\top \wedge \neg A \wedge \neg B \wedge (A \vee B)\big)$$

ja $A \vee B \in \Delta$, jos ja vain, jos $A \in \Delta$ tai $B \in \Delta$.