

1. Aloitetaan lauseen negaatiosta

$$\neg\left(\left(Q \vee (P \wedge \mathbf{AXA}(PUQ))\right) \rightarrow \mathbf{A}(PUQ)\right).$$

Muunnetaan lause positiiviseen normaalimuotoon:

$$\begin{aligned} &\left(Q \vee (P \wedge \mathbf{AXA}(PUQ))\right) \wedge \neg\mathbf{A}(PUQ) \\ &\left(Q \vee (P \wedge \mathbf{AXA}(PUQ))\right) \wedge \mathbf{E}(\neg PBQ) \end{aligned}$$

Muodostetaan taulu. Aloitetaan OR-solmusta

$$D_0 = \left\{ \left(Q \vee (P \wedge \mathbf{AXA}(PUQ))\right) \wedge \mathbf{E}(\neg PBQ) \right\},$$

jonka AND-seuraajat ovat

$$\begin{aligned} C_0 = &\left\{ \left(Q \vee (P \wedge \mathbf{AXA}(PUQ))\right) \wedge \mathbf{E}(\neg PBQ), \right. \\ &Q \vee (P \wedge \mathbf{AXA}(PUQ)), \mathbf{E}(\neg PBQ), \\ &Q, \neg Q, \neg P \vee \mathbf{EXE}(\neg PBQ), \neg P \left. \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_1 = &\left\{ \left(Q \vee (P \wedge \mathbf{AXA}(PUQ))\right) \wedge \mathbf{E}(\neg PBQ), \right. \\ &Q \vee (P \wedge \mathbf{AXA}(PUQ)), \mathbf{E}(\neg PBQ), \\ &Q, \neg Q, \neg P \vee \mathbf{EXE}(\neg PBQ), \mathbf{EXE}(\neg PBQ) \left. \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_2 = &\left\{ \left(Q \vee (P \wedge \mathbf{AXA}(PUQ))\right) \wedge \mathbf{E}(\neg PBQ), \right. \\ &Q \vee (P \wedge \mathbf{AXA}(PUQ)), \mathbf{E}(\neg PBQ), \\ &P \wedge \mathbf{AXA}(PUQ), P, \mathbf{AXA}(PUQ), \neg Q, \\ &\neg P \vee \mathbf{EXE}(\neg PBQ), \neg P \left. \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_3 = &\left\{ \left(Q \vee (P \wedge \mathbf{AXA}(PUQ))\right) \wedge \mathbf{E}(\neg PBQ), \right. \\ &Q \vee (P \wedge \mathbf{AXA}(PUQ)), \mathbf{E}(\neg PBQ), \\ &P \wedge \mathbf{AXA}(PUQ), P, \mathbf{AXA}(PUQ), \neg Q, \\ &\neg P \vee \mathbf{EXE}(\neg PBQ), \mathbf{EXE}(\neg PBQ) \left. \right\} \end{aligned}$$

Solmut  $C_0$ ,  $C_1$  ja  $C_2$  voidaan karsia pois, koska ne sisältävät jonkin lauseen ja sen negaation. (Ristiriitaisten AND-solmujen karsintasääntöjä voidaan siis työmäärän vähentämiseksi soveltaa jo AND-solmuja muodostettaessa; voidaan osoittaa, että millään solmulla, joka saataisiin edelleen generoimalla täydellisesti kaikki solmujen  $C_0$ ,  $C_1$  tai  $C_2$  OR-seuraaajat, näiden AND-seuraaajat jne., ei ole merkitystä tutkittavana olevan lauseen toteutuvuustarkistuksen kannalta lopullisessa taulussa. Tämä johtuu siitä, että mikään näin syntyvistä solmuista ei sisällä tutkittavana olevaa lausetta, eikä mikään jostakin muusta AND-solmusta lähtevä tulevaisuuspolku voi kulkea ristiriitaisen AND-solmun kautta.)

Koska solmu  $C_3$  sisältää lauseet  $\mathbf{AXA}(PUQ)$  ja  $\mathbf{EXE}(\neg PBQ)$ , solmulle  $C_3$  saadaan OR-seuraaaja  $D_1 = \{\mathbf{A}(PUQ), \mathbf{E}(\neg PBQ)\}$ .

$D_1$ :n AND-seuraaajat:

$$\begin{aligned} C_4 &= D_1 \cup \{Q, \neg Q, \neg P \vee \mathbf{EXE}(\neg PBQ), \neg P\} \\ C_5 &= D_1 \cup \{Q, \neg Q, \neg P \vee \mathbf{EXE}(\neg PBQ), \mathbf{EXE}(\neg PBQ)\} \\ C_6 &= D_1 \cup \{P \wedge \mathbf{AXA}(PUQ), P, \mathbf{AXA}(PUQ), \neg Q, \\ &\quad \neg P \vee \mathbf{EXE}(\neg PBQ), \neg P\} \\ C_7 &= D_1 \cup \{P \wedge \mathbf{AXA}(PUQ), P, \mathbf{AXA}(PUQ), \neg Q, \\ &\quad \neg P \vee \mathbf{EXE}(\neg PBQ), \mathbf{EXE}(\neg PBQ)\} \end{aligned}$$

Koska solmut  $C_4$ ,  $C_5$  ja  $C_6$  ovat ristiriitaisia, ne voidaan karsia pois. Jäljelle jää solmu  $C_7$ , jolle saadaan OR-seuraaaja  $\{\mathbf{A}(PUQ), \mathbf{E}(\neg PBQ)\} = D_1$ .

AND-solmu  $C_7$  karsitaan pois, sillä tämä solmu sisältää tulevaisuuslauseen  $\mathbf{A}(PUQ)$ , joka ei toteudu solmussa. Tämä johtuu siitä, että taulusta ei voida erottaa solmusta  $C_7$  lähtevää luentokalvoissa esitetyt ehdot täyttävää asyklistä aligraafia, jonka kaikki lehtisolmut sisältäisivät lauseen  $Q$ , ja lause  $P$  olisi mukana kaikissa muissa aligraafin AND-solmuissa.

Solmun  $C_7$  poistamisen jälkeen voidaan karsintasääntöjen perusteella poistaa järjestyksessä solmut  $D_1$ ,  $C_3$  ja  $D_0$ . Koska jäljelle jäävässä taulussa ei ole yhtään AND-solmua, joka sisältäisi lauseen

$$\left( Q \vee (P \wedge \mathbf{AXA}(PUQ)) \right) \wedge \mathbf{E}(\neg PBQ),$$

seuraa, että lause on toteutumaton. Siten lauseen negaatio (alkuperäinen lause) on pätevä.

2. Muunnetaan lause ensin positiiviseen normaalimuotoon.

$$\begin{aligned} & \mathbf{GF}P \rightarrow \mathbf{GF}\neg P \\ & \neg\mathbf{GF}P \vee \mathbf{GF}\neg P \\ & \mathbf{FG}\neg P \vee \mathbf{GF}\neg P \end{aligned}$$

Korvataan sitten lauseessa esiintyvät LTL:n konnektiivit **F** ja **G** CTL:n konnektiiveilla **AF** ja **AG**, jolloin saadaan CTL-lause

$$\mathbf{AFAG}\neg P \vee \mathbf{AGAF}\neg P.$$

Tämä CTL-lause on toteutuva, jos ja vain, jos alkuperäinen LTL-lause on toteutuva. Tutkitaan siis taulumenetelmällä, onko CTL-lause toteutuva. Taulun juurena on OR-solmu

$$D_0 = \{\mathbf{AFAG}\neg P \vee \mathbf{AGAF}\neg P\}.$$

$D_0$ :n AND-seuraajat:

$$C_0 = \{\mathbf{AFAG}\neg P \vee \mathbf{AGAF}\neg P, \mathbf{AFAG}\neg P, \mathbf{AG}\neg P, \neg P, \mathbf{AXAG}\neg P\}$$

$$C_1 = \{\mathbf{AFAG}\neg P \vee \mathbf{AGAF}\neg P, \mathbf{AFAG}\neg P, \mathbf{AXAFAG}\neg P\}$$

$$C_2 = \{\mathbf{AFAG}\neg P \vee \mathbf{AGAF}\neg P, \mathbf{AGAF}\neg P, \mathbf{AF}\neg P, \mathbf{AXAGAF}\neg P, \neg P\}$$

$$C_3 = \{\mathbf{AFAG}\neg P \vee \mathbf{AGAF}\neg P, \mathbf{AGAF}\neg P, \mathbf{AF}\neg P, \mathbf{AXAGAF}\neg P, \mathbf{AXAF}\neg P\}$$

$C_0$ :n OR-seuraaja:  $D_1 = \{\mathbf{AG}\neg P\}$

$C_1$ :n OR-seuraaja:  $D_2 = \{\mathbf{AFAG}\neg P\}$

$C_2$ :n OR-seuraaja:  $D_3 = \{\mathbf{AGAF}\neg P\}$

$C_3$ :n OR-seuraaja:  $D_4 = \{\mathbf{AGAF}\neg P, \mathbf{AF}\neg P\}$

$D_1$ :n AND-seuraaja:  $C_4 = \{\mathbf{AG}\neg P, \neg P, \mathbf{AXAG}\neg P\}$

$D_2$ :n AND-seuraajat:

$$C_5 = \{\mathbf{AFAG}\neg P, \mathbf{AG}\neg P, \neg P, \mathbf{AXAG}\neg P\}$$

$$C_6 = \{\mathbf{AFAG}\neg P, \mathbf{AXAFAG}\neg P\}$$

$D_3$ :n AND-seuraajat:

$$C_7 = \{\mathbf{AGAF}\neg P, \mathbf{AF}\neg P, \mathbf{AXAGAF}\neg P, \neg P\}$$

$$C_8 = \{\mathbf{AGAF}\neg P, \mathbf{AF}\neg P, \mathbf{AXAGAF}\neg P, \mathbf{AXAF}\neg P\}$$

$D_4$ :n AND-seuraajat:

$$C_9 = \{\mathbf{AGAF}\neg P, \mathbf{AF}\neg P, \mathbf{AXAGAF}\neg P, \neg P\} = C_7$$

$$C_{10} = \{\mathbf{AGAF}\neg P, \mathbf{AF}\neg P, \mathbf{AXAGAF}\neg P, \mathbf{AXAF}\neg P\} = C_8$$

$$C_4\text{:n OR-seuraaja: } D_5 = \{\mathbf{AG}\neg P\} = D_1$$

$$C_5\text{:n OR-seuraaja: } D_6 = \{\mathbf{AG}\neg P\} = D_1$$

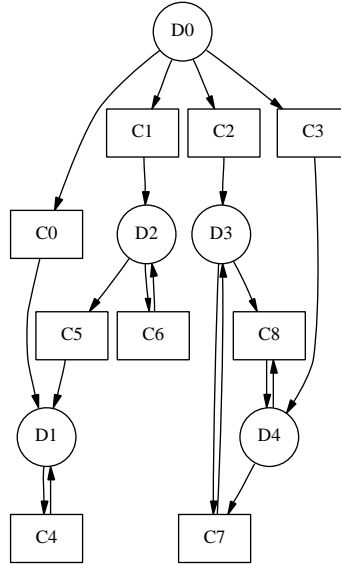
$$C_6\text{:n OR-seuraaja: } D_7 = \{\mathbf{AFAG}\neg P\} = D_2$$

$$C_7\text{:n OR-seuraaja: } D_8 = \{\mathbf{AGAF}\neg P\} = D_3$$

$$C_8\text{:n OR-seuraaja: } D_9 = \{\mathbf{AGAF}\neg P, \mathbf{AF}\neg P\} = D_4$$

Huomaa, että mikään yllä syntyvistä AND-solmuista ei ole ristiriitainen, joten solmujen karsinta ristiriitaisuuden perusteella ei tässä tehtävässä ole mahdollista.

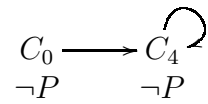
Alustava taulu  $T_0$ :



Koska solmu  $C_4$  ei sisällä keskenään ristiriitaisia lauseita eikä myöskään yhtään tulevaisuuslauseetta, solmu  $C_4$  jää myös lopulliseen tauluun. Tällöin OR-solmulle  $D_1$  jää tauluun seuraaja, joten solmua  $D_1$  ei myöskään karsita. Kaikki solmun  $C_0$  seuraajat jäävät siis myös lopulliseen tauluun. Solmua  $C_0$  ei karsita, koska se ei sisällä keskenään ristiriitaisia lauseita ja koska sen kaikki tulevaisuuslauseet (tässä tapauksessa vain yksi,  $\mathbf{AFAG}\neg P$ ) toteutuvat alustavassa taulussa.

Seuraa, että  $T_0$ :sta saatava lopullinen taulu sisältää AND-solmun  $C_0$ , joka sisältää lauseen  $\mathbf{AFAG}\neg P \vee \mathbf{AGAF}\neg P$ . Todetaan, että tämä CTL-lause on toteutuva.

Solmujen  $C_0$  ja  $C_4$  avulla voidaan nyt muodostaa CTL-lauseelle malli



Koska CTL-lause  $\mathbf{AFAG}\neg P \vee \mathbf{AGAF}\neg P$  on toteutuva, seuraa, että myös LTL-lause  $\mathbf{FG}\neg P \vee \mathbf{GF}\neg P \equiv \mathbf{GFP} \rightarrow \mathbf{GF}\neg P$  on toteutuva.