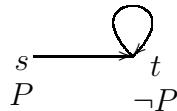


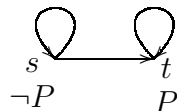
1. a) $P \wedge \mathbf{EF}Q$
 b) $\mathbf{EF}(P \wedge \mathbf{AXAG}\neg P)$
 c) $\mathbf{AG}(P \rightarrow \mathbf{AX}(P \rightarrow \mathbf{EF}Q))$
 d) $(P \rightarrow \mathbf{A}(PUQ)) \wedge (\neg P \rightarrow \mathbf{AX}(P \vee \mathbf{AX}P))$
 e) $\mathbf{E}(PU\mathbf{AG}((Q \rightarrow \mathbf{AX}\neg Q) \wedge (\neg Q \rightarrow \mathbf{AX}Q)))$
 f) $\mathbf{AG}(P \rightarrow \mathbf{AG}(\neg Q \wedge \neg R)) \wedge \mathbf{AG}((Q \vee R) \rightarrow \mathbf{AG}\neg P)$
2. a) $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$, missä $S = \{s, t\}$, $R = \{\langle s, t \rangle, \langle t, t \rangle\}$, $v(s, P) = \text{true}$ ja $v(t, P) = \text{false}$.



$\mathcal{M}, s \models \mathbf{AFP}$ pätee, koska (s, t, t, t, \dots) on ainoa s :stä alkava täysi polku, ja tällä polulla on tila s , jolle pätee $\mathcal{M}, s \models P$. Siten \mathbf{AFP} on toteutuva.

Jotta \mathbf{GFP} toteutuisi mallissa \mathcal{M} , tulisi mallissa silloin olla olemassa täysi polku x , jolle $\mathcal{M}, x \models \mathbf{GFP}$, jolloin $\mathcal{M}, x^i \models \mathbf{FP}$ pätsi kaikille $i \geq 0$, eli kaikille $i \geq 0$ olisi olemassa $j \geq i$ siten, että $\mathcal{M}, x^j \models P$. Toisin sanoen P :n pitäisi toteutua polun x äärettömän monessa (äärettömässä) loppuosassa. Tällaisia polkuja ei kuitenkaan ole, sillä \mathcal{M} :n ainoat täydet polut ovat (s, t, t, t, \dots) ja (t, t, t, \dots) , ja P pätee ainoastaan äärellisen monessa näiden polkujen äärettömässä loppuosassa. Lause \mathbf{GFP} ei siis ole toteutuva mallissa \mathcal{M} .

- b) $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$, missä $S = \{s, t\}$, $R = \{\langle s, s \rangle, \langle s, t \rangle, \langle t, t \rangle\}$, $v(s, P) = \text{false}$ ja $v(t, P) = \text{true}$.



$\mathcal{M}, s \models \mathbf{EFAGP}$ ja $\mathcal{M}, t \models \mathbf{EFAGP}$ pätevät, koska malli sisältää täydet polut (s, t, t, t, \dots) ja (t, t, t, \dots) , joka kulkevat tilan t

kautta, jolle selvästi pätee $\mathcal{M}, t \models \mathbf{AG}P$. Lause **EFAGP** on siis pätevä mallissa.

Lause **FGP** ei kuitenkaan ole pätevä mallissa, sillä täydellä polulla (s, s, s, \dots) ei ole ääretöntä loppuosaa x siten, että $\mathcal{M}, x^i \models P$ pätsisi kaikille i (koska $v(s, P) = \text{false}$), jolloin siis $\mathcal{M}, (s, s, s, \dots) \not\models \mathbf{FGP}$.

- c) $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$, missä $S = \{s, t\}$, $R = \{\langle s, s \rangle, \langle s, t \rangle, \langle t, s \rangle, \langle t, t \rangle\}$, $v(s, P) = \text{true}$ ja $v(t, P) = \text{false}$.



Lause **FXP** on toteutuva, sillä mallissa on (esim.) täysi polku $x = (t, s, s, s, \dots)$, jolle $\mathcal{M}, x \models \mathbf{XP}$ (koska $v(s, P) = \text{true}$), ja siten $\mathcal{M}, x \models \mathbf{FXP}$.

Lause **EFAXP** ei kuitenkaan ole toteutuva missään mallin tilassa: jos lause toteutuisi, olisi mallissa olemassa tilasta s tai t lähtevä tilojen s ja t kautta kulkeva täysi polku, joka kulkisi lauseen **AXP** toteuttavan tilan kautta. Tulisi siis olla joko $\mathcal{M}, s \models \mathbf{AXP}$ tai $\mathcal{M}, t \models \mathbf{AXP}$; kumpikaan näistä ei kuitenkaan toteudu, sillä sekä s :llä että t :llä on R -relaatioissa seuraaja t , jolle $\mathcal{M}, t \not\models P$.

3. a) $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$, missä $S = \{s, t\}$, $R = \{\langle s, t \rangle, \langle t, s \rangle\}$, $v(s, P) = v(s, V) = \text{false}$ ja $v(t, P) = v(t, V) = \text{true}$.



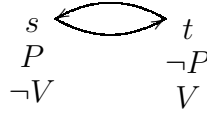
Tästä mallista voidaan erottaa täydet polut $x_1 = (s, t, s, t, \dots)$ ja $x_2 = (t, s, t, s, \dots)$.

- $\mathcal{M}, s \models \mathbf{E}(\neg V \mathbf{U} P)$ pätee, sillä $\mathcal{M}, x_1^1 \models P$ (koska $v(t, P) = \text{true}$), ja kaikille $i < 1$ pätee $\mathcal{M}, x_1^i \models \neg V$. Myös $\mathcal{M}, t \models \mathbf{E}(\neg V \mathbf{U} P)$ pätee, sillä x_2 on t :stä lähtevä täysi polku, ja $\mathcal{M}, x_2^0 \models P$.
- Koska $\mathcal{M}, x_1^0 \models \neg P$, niin $\mathcal{M}, s \models \mathbf{E}(V \mathbf{U} \neg P)$ pätee. Vastaavasti $\mathcal{M}, t \models \mathbf{E}(V \mathbf{U} \neg P)$ pätee, koska $\mathcal{M}, x_2^1 \models \neg P$, ja $\mathcal{M}, x_2^i \models V$ kaikille $i < 1$.
- $\mathcal{M}, s \models \mathbf{AF}(V \rightarrow \mathbf{AX}\neg V) \wedge \mathbf{EFV}$, sillä x_1 on ainoa s :stä alkava täysi polku, ja $\mathcal{M}, x_1 \models \mathbf{F}(V \rightarrow \mathbf{AX}\neg V)$ (koska selvästi esim. $\mathcal{M}, x_1^0 \models V \rightarrow \mathbf{AX}\neg V$, koska $v(s, V) = \text{false}$) ja

lisäksi $\mathcal{M}, x_1 \models \mathbf{FV}$, koska polku x_1 kulkee tilan t kautta, ja $v(t, V) = \text{true}$.

Samalla tavoin havaitaan, että $\mathcal{M}, t \models \mathbf{AF}(V \rightarrow \mathbf{AX}\neg V) \wedge \mathbf{EFV}$, sillä x_2 on ainoa t :stä alkava täysi polku, ja x_2 :lle pätee $\mathcal{M}, x_2^0 \models \mathbf{AX}\neg V$, koska $\mathcal{M}, t \models \mathbf{AX}\neg V$ (ainoa t :n seuraaja on s , ja $v(s, V) = \text{false}$). Myös $\mathcal{M}, t \models \mathbf{EFV}$ pätee, koska t :stä lähtevälle täydelle polulle x_2 pätee $\mathcal{M}, x_2^0 \models V$ (koska $v(t, V) = \text{true}$).

- b) $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$, missä $S = \{s, t\}$, $R = \{\langle s, t \rangle, \langle t, s \rangle\}$, $v(t, P) = v(s, V) = \text{false}$ ja $v(s, P) = v(t, V) = \text{true}$.



Mallista \mathcal{M} voidaan jälleen erottaa kaksi täyttä polkua $x_1 = (s, t, s, t, \dots)$ ja $x_2 = (t, s, t, s, \dots)$.

- $\mathcal{M}, s \models \mathbf{AG}(P \rightarrow \mathbf{FV})$, sillä x_1 on ainoa s :stä alkava täysi polku, ja $\mathcal{M}, x_1 \models \mathbf{G}(P \rightarrow \mathbf{FV})$. Tämä puolestaan seuraa siitä, että $\mathcal{M}, x_1^{2k} \models \mathbf{FV}$ (koska $\mathcal{M}, x_1^{2k+1} \models V$) kaikilla $k \geq 0$ sekä siitä, että $\mathcal{M}, x_1^{2k+1} \not\models P$ kaikilla $k \geq 0$.

Vastaavasti myös $\mathcal{M}, t \models \mathbf{AG}(P \rightarrow \mathbf{FV})$ pätee, sillä x_2 on ainoa t :stä alkava täysi polku, ja $\mathcal{M}, x_2 \models \mathbf{G}(P \rightarrow \mathbf{FV})$, koska $\mathcal{M}, x_2^{2k} \not\models P$ ja $\mathcal{M}, x_2^{2k+1} \models \mathbf{FV}$ kaikilla $k \geq 0$.

- $\mathcal{M}, s \models \mathbf{AF}(P \wedge \mathbf{F}(\neg P \wedge \mathbf{XP}))$, sillä x_1 on ainoa s :stä alkava täysi polku, ja $\mathcal{M}, x_1^0 \models P \wedge \mathbf{F}(\neg P \wedge \mathbf{XP})$, koska $\mathcal{M}, x_1^0 \models P$ ($v(s, P) = \text{true}$) ja $\mathcal{M}, x_1^1 \models \mathbf{F}(\neg P \wedge \mathbf{XP})$, sillä $\mathcal{M}, x_1^1 \models \neg P \wedge \mathbf{XP}$ (koska $v(t, P) = \text{false}$ ja $\mathcal{M}, (x_1^1)^1 \models P$).

Myös $\mathcal{M}, t \models \mathbf{AF}(P \wedge \mathbf{F}(\neg P \wedge \mathbf{XP}))$ on voimassa, sillä x_2 on ainoa t :stä lähtevä täysi polku, ja koska $x_2^1 = x_1 = x_1^0$ ja $\mathcal{M}, x_1^0 \models P \wedge \mathbf{F}(\neg P \wedge \mathbf{XP})$ (ks. yllä), $\mathcal{M}, x_2 \models \mathbf{F}(P \wedge \mathbf{F}(\neg P \wedge \mathbf{XP}))$.

- $\mathcal{M}, s \models \mathbf{A}(\neg V\mathbf{UV})$, sillä x_1 on ainoa s :stä alkava täysi polku, ja $\mathcal{M}, x_1 \models \neg V\mathbf{UV}$, koska $\mathcal{M}, x_1^1 \models V$ ($v(t, V) = \text{true}$) ja $\mathcal{M}, x_1^i \models \neg V$ kaikille $i < 1$ ($v(s, V) = \text{false}$).

Koska $v(t, V) = \text{true}$, $\mathcal{M}, x \models \neg V\mathbf{UV}$ pätee kaikille t :stä alkaville täysille poluille x . Tästä seuraa, että $\mathcal{M}, t \models \mathbf{A}(\neg V\mathbf{UV})$ pätee.