Käännös predikaattilogiikkaan

Modaalilogiikka voidaan kääntää rajoitettuun osajoukkoon predikaattilogiikkaa:

- Jokaiselle modaalilogiikan atomilauseelle P on yksipaikkainen predikaattisymboli P.
- Kaksi muuttujaa.
- Kaksipaikkainen predikaattisymboli R.

Olkoon x_1 ja x_2 kaksi eri muuttujaa ja jos x on toinen näistä, x' on toinen.

Määritelmä. Olkoon τ seuraava kuvaus modaalilauseilta ja muuttujilta predikaattilogiikan lauseille:

1. $\tau(\top, x) = \top$; $\tau(\bot, x) = \bot$;
2. $\tau(P, x) = P(x)$ atomilauseelle P;
3. $\tau(\neg P, x) = \neg\tau(P, x)$;
4. $\tau(P \to Q, x) = \tau(P, x) \to \tau(Q, x)$;
5. $\tau(\Box P, x) = \forall x'(R(x, x') \to \tau(P, x'))$;

Esimerkki. $\tau(\neg\Box P \to \Box\neg\Box P, x_1) = \tau(\neg\Box P, x_1) \to \tau(\Box\neg\Box P, x_1)$
$= \neg\tau(\Box P, x_1) \to \forall x_2(R(x_1, x_2) \to \tau(\neg\Box P, x_2))$
$= \neg(\forall x_2(R(x_1, x_2) \to \tau(P, x_2))) \to \forall x_2(R(x_1, x_2) \to \neg\tau(\Box P, x_2))$
$= \neg(\forall x_2(R(x_1, x_2) \to P(x_2))) \to$
$\quad \forall x_2(R(x_1, x_2) \to \neg(\forall x_1(R(x_2, x_1) \to \tau(P, x_1))))$
$= \neg(\forall x_2(R(x_1, x_2) \to P(x_2))) \to$
$\quad \forall x_2(R(x_1, x_2) \to \neg(\forall x_1(R(x_2, x_1) \to P(x_1))))$

Teoreema.
(i) P on $\mathbf{K}$-pätevä joss $\forall x_1 \tau(P, x_1)$ on pätevä predikaattilogiikassa.

(ii) $\Sigma \models_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow P$ joss $\tau(\Sigma) \models_{\mathrm{cl}} \forall x_1 \tau(P, x_1)$

missä $\tau(\Sigma) = \{\forall x_1 \tau(Q, x_1) \mid Q \in \Sigma\}$ ja $\models_{\mathrm{cl}}$ tarkoittaa loogista seuraavuutta predikaattilogiikassa.

- Modaalilogiikka $\mathbf{T}$:
  P on $\mathbf{T}$-pätevä joss $\{\forall x_1 R(x_1, x_1)\} \models_{\mathrm{cl}} \forall x_1 \tau(P, x_1)$.
- Modaalilogiikka $\mathbf{S5}$:
  P on $\mathbf{S5}$-pätevä joss $\Sigma_{\mathbf{S5}} \models_{\mathrm{cl}} \forall x_1 \tau(P, x_1)$
  missä $\Sigma_{\mathbf{S5}} = \{\forall x_1 R(x_1, x_1), \forall x_1 \forall x_2 (R(x_1, x_2) \to R(x_2, x_1)),$
  $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 (R(x_1, x_2) \wedge R(x_2, x_3) \to R(x_1, x_3))\}$

Multimodaalilogiikat

Monen agentin tietämyslogiikka $\mathbf{S5_n}$

- n agenttia: $K_i, i = 1, \ldots, n$
  Esim. $K_1 K_2 \neg K_1 P$
- Malli $\langle S, R_1, \ldots, R_n, v \rangle$
- $\mathcal{M}, s \Vdash K_i P$ joss $\mathcal{M}, t \Vdash P$ kaikille $t \in S$, joille $s R_i t$.
- (Hilbert) todistusteoria:
  kaikille K_i $\mathbf{S5}$-aksioomat.
- Kaikki tietävät: EP
  - $\mathcal{M}, s \Vdash EP$ joss $\mathcal{M}, s \Vdash K_i P$ kaikille $i = 1, \ldots, n$
  - Aksiooma: $EP \leftrightarrow K_1 P \wedge \cdots \wedge K_n P$

Multimodaalilogiikat (II)

- Yleinen tietäminen (common knowledge): CP
  - $\mathcal{M},s \Vdash CP$ joss $\mathcal{M},s \Vdash E^k P$ kaikille $k = 1,2,\ldots$

    $\boxed{\Rightarrow}$ $\mathcal{M},s \Vdash CP$ joss $\mathcal{M},t \Vdash P$ kaikille $t \in S$, joille t on C-saavutettavissa tilasta s.

    (Maailma t on C-saavutettavissa maailmasta s, jos on olemassa $k \geq 1$ ja jono $(s =)t_0, t_1, \ldots, t_k (= t)$, jolle kaikilla $j = 0,\ldots,k-1, t_j R_i t_{j+1}$ jollekin $i, 1 \leq i \leq n$.)
  - Aksiooma: $CP \rightarrow E(P \wedge CP)$
  - Päättelysääntö:
    $$\frac{P \rightarrow E(Q \wedge P)}{P \rightarrow CQ}$$
  - Esim. $CP \rightarrow K_1 K_2 \cdots K_n P$ on $\mathbf{S5_n}$-pätevä.

Ratkeavuus

- Logiikka on ratkeava, jos on olemassa algoritmi (Turingin kone), joka ratkaisee, onko annettu lause ko. logiikan pätevä lause vai ei.
- Jos logiikalla on todistusteoria (esim. Hilbert-tyylinen), logiikka on puoli-ratkeava: on olemassa algoritmi, joka pysähtyy ja vastaa kyllä, kun sille annetaan syötteeksi pätevä lause.

  (Muodostetaan kaikki todistukset jollain systemaattisella tavalla.)

  $\boxed{\Rightarrow}$ Pätevien lauseiden joukko on rekursiivisesti numeroituva.

Äärellisen mallin ominaisuus

Määritelmä. Modaalilogiikalla $\mathbf{L}$ on äärellisen mallin ominaisuus, jos jokaisella lauseella P, joka ei ole $\mathbf{L}$-pätevä, on olemassa äärellinen $\mathbf{L}$-malli, jossa P on epätosi (jossain tilassa).

Nyt ei-pätevien lauseiden joukko on puoli-ratkeava.

(Muodostetaan kaikki äärelliset mallit ja tarkistetaan, onko lause epätosi kussakin.)

Propositio. Jos modaalilogiikalla $\mathbf{L}$ on todistusteoria ja äärellisen mallin ominaisuus, $\mathbf{L}$ on ratkeava.

Miten osoitetaan, että modaalilogiikalla on äärellisen mallin ominaisuus?

$\boxed{\Rightarrow}$ Filtraatio.

Esimerkki. Osoitetaan, että logiikalla $\mathbf{K}$ on äärellisen mallin ominaisuus filtraatiolla.

Oletetaan, ettei lause Q ole $\mathbf{K}$-pätevä. Tällöin on olemassa malli $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$ ja maailma $s_0 \in S$ siten, että $\mathcal{M}, s_0 \not\Vdash Q$.

Äärellinen malli $|\mathcal{M}|$ filtraatiolla mallista $\mathcal{M}$:

- Olkoon $\mathrm{Sub}(Q)$ Q:n kaikkien alilauseiden joukko.
- Määritellään ekvivalenssirelaatio $\sim$ joukolle S: $s \sim t$ jos kaikille $P \in \mathrm{Sub}(Q)$, $\mathcal{M},s \Vdash P$ joss $\mathcal{M},t \Vdash P$.
- Olkoon $|s| = \{t \in S : t \sim s\}$ ja $|S| = \{|s| : s \in S\}$. $|S|$ on äärellinen: korkeintaan 2^n jäsentä, missä n on lauseen Q alilauseiden määrä.
- Olkoon malli $|\mathcal{M}| = \langle |S|, |R|, |v| \rangle$, missä relaatio $|R|$: $|s||R||t|$ joss on olemassa $s' \in |s|$ ja $t' \in |t|$, joille $s'Rt'$ ja valuaatio $|v|$: $|v|(|s|, P) = v(s, P)$

(Esimerkki jatkuu)

Osoitetaan rakenteisella induktiolla, että kaikille $P \in \mathrm{Sub}(Q)$,

$$\mathcal{M},s \Vdash P \text{ joss } |\mathcal{M}|,|s| \Vdash P.$$

- P on atomilause: $|v|(|s|,P) = v(s,P)$
- $\mathcal{M},s \Vdash \neg P$ joss $\mathcal{M},s \nVdash P$ joss (IH) $|\mathcal{M}|,|s| \nVdash P$ joss $|\mathcal{M}|,|s| \Vdash \neg P$.

  $\ldots$
- $\Box P$: ($\Leftarrow$) Olkoon $\mathcal{M},s \nVdash \Box P$. Siis löytyy t, jolle sRt ja $\mathcal{M},t \nVdash P$. Tällöin $|s||R||t|$ ja $|\mathcal{M}|,|t| \nVdash P$ (IH). Siis $|\mathcal{M}|,|s| \nVdash \Box P$.

  ($\Rightarrow$) Olkoon $|\mathcal{M}|,|s| \nVdash \Box P$. Täten on olemassa $|t|$, jolle $|s||R||t|$ ja $|\mathcal{M}|,|t| \nVdash P$. Siis $\mathcal{M},t \nVdash P$ (IH). Nyt on olemassa $s' \in |s|$ ja $t' \in |t|$, joille $s'Rt'$ ja $\mathcal{M},t' \nVdash P$. Siis $\mathcal{M},s' \nVdash \Box P$, jolloin $\mathcal{M},s \nVdash \Box P$.

(Esimerkki jatkuu)

- Näin ollen kaikille $P \in \mathrm{Sub}(Q)$, $\mathcal{M},s \Vdash P$ joss $|\mathcal{M}|,|s| \Vdash P$.
- Koska $\mathcal{M},s_0 \nVdash Q$ ja $Q \in \mathrm{Sub}(Q)$, $|\mathcal{M}|,|s_0| \nVdash Q$.
- Täten olemme osoittaneet, että logiikalla $\mathbf{K}$ on äärellisen mallin ominaisuus.

Useilla muillakin normaaleilla modaalilogiikoilla on äärellisen mallin ominaisuus (esim. $\mathbf{T}, \mathbf{K4}, \mathbf{S4}, \mathbf{KB}, \mathbf{B}, \mathbf{S5}, \mathbf{D}, \mathbf{D4}, \mathbf{DB}, \mathbf{KD45}$).

Ratkeavuus

- Jos vastamallien koolle voidaan antaa yläraja, logiikka on ratkeava.
- Näin ei saada kovin tehokkaita ratkaisumenetelmiä.
- Taulumenetelmä tehokkaampi lähestymistapa.

Esimerkki. Logiikan $\mathbf{K}$ ratkeavuus

Osoitetaan, että annettu logiikan $\mathbf{K}$ ratkaisuproseduuri pysähtyy väistämättä. Todistukseen tarvitaan *Königin* lemmaa:

> Jos puussa on ääretön määrä solmuja mutta jokaisella solmulla on äärellinen määrä lapsisolmuja, puussa on ääretön haara.

Ratkaisuproseduuri (lauseen P $\mathbf{K}$-pätevyydelle):

1. Taulun juureksi $\langle 1 \rangle \neg P$.
2. WHILE taulu ei suljettu eikä kaikkia lauseita merkitty käytetyiksi DO BEGIN

2.1 Valitaan taulusta ylin käyttämätön solmu σQ.

2.2 Jos Q ei ole literaali, jokaiselle haaralle θ, joka kulkee σQ kautta:

- Jos σQ on muotoa $\sigma\alpha$, lisätään haaran θ loppuun ensin $\sigma\alpha_1$ ja sitten $\sigma\alpha_2$.
- Jos σQ on muotoa $\sigma\beta$, lisätään θ:n loppuun kaksi lapsisolmua $\sigma\beta_1$ ja $\sigma\beta_2$.
- Jos σQ on muotoa $\sigma\neg\Box P$ lisätään haaran θ loppuun solmu $\sigma n \neg P$ jollekin tässä haarassa rajoittamattomalle σn sekä tämän jälkeen $\sigma n X$ kullekin haarassa esiintyvälle $\sigma\Box X$.
- Jos σQ on muotoa $\sigma\Box P$, kaikille tässä haarassa tarjolla oleville σn lisätään haaran θ loppuun solmu $\sigma n P$.

/* Lisätään lause vain jos ko. lause ei jo esiinny haarassa.*/

2.3 Merkitään σQ käytetyksi.

END.

Propositio. Ratkaisuproseduuri pysähtyy jokaiselle lauseelle äärellisen askelmäärän jälkeen.

Todistus. Oletetaan, että logiikan $\mathbf{K}$ ratkaisuproseduuri ei pysähdy lauseelle P, jolloin tuloksena on ääretön puu, jonka jokaisella solmulla on äärellinen määrä lapsia.

Königin lemman perusteella puussa on ääretön haara θ.

Tässä haarassa on ääretön määrä prefiksoituja lauseita, jotka ovat kaikki erilaisia (oletetaan, että proseduuri lisää prefiksoidun lauseen haaraan vain, jos se ei vielä esiinny siinä).

Jokaiselle prefiksille σ: jos σQ esiintyy haarassa θ, Q on lauseen P alilause tai sen negaatio. Koska alilauseita on vain äärellinen määrä, jokainen prefiksi voi esiintyä vain äärellisen monta kertaa.

Täten äärettömän monta erilaista prefiksiä täytyy esiintyä haarassa θ.

On kaksi mahdollisuutta:

(i) Haarassa θ on äärettömän monta samanmittaista prefiksiä.

Olkoon n pienin luonnollinen luku siten, että haarassa on äärettömän monta n mittaista prefiksiä.

$n \neq 1$, koska ainoa yhdenmittainen prefiksi on $\langle 1 \rangle$ ja se esiintyy äärellisen monta kertaa.

$n > 1$: Ainoa tapa saada n-mittainen prefiksi haaraan on käyttää $\neg\Box$- tai $\Box$-sääntöä lauseelle σQ, jossa prefiksin σ mitta on $n-1$. Siis jos haarassa on äärettömän monta n-mittaista prefiksiä, siinä on oltava äärettömän monta $(n-1)$-mittaista prefiksiä. Tämä on ristiidassa luvun n valinnan kanssa.

Siis vaihtoehto (i) ei voi toteutua.

(ii) Jokaisella luvulla n haarassa θ on äärellisen monta n-mittaista prefiksiä.

Koska prefiksejä on haarassa äärettömästi, on oltava äärettömän monen mittaisia prefiksejä.

Näytetään, että tämä on mahdotonta osoittamalla, että jokaiselle haaran lauseelle σQ pätee:

L: Prefiksin σ pituuden summa Q:n modaalioperaattoreiden määrän kanssa on aina pienempi tai yhtä suuri kuin $1+m$

missä m P:n modaalioperaattoreiden määrä.

Selvästi (L) pätee taulun juurelle $\langle 1 \rangle \neg P$.

Jos lause on saatu α- tai β-säännöllä lauseesta, jolle (L) pätee, pätee se myös uudelle prefiksoidulle lauseelle.

Jos lause on saatu $\Box$- tai $\neg\Box$-säännöllä, se on muotoa $\sigma k Q$ ja se on saatu muotoa $\sigma Q'$ olevasta lauseesta. Oletetaan, että (L) pätee lauseelle $\sigma Q'$. Nyt prefiksin σk mitta on 1 + prefiksin σ mitta mutta lauseessa Q on vastaavasti yksi modaalioperaattori vähemmän kuin lauseessa Q'. Siis (L) pätee myös lauseelle $\sigma k Q$.

Koska (L) pätee kaikille haaran prefiksoiduille lauseille, haarassa voi esiintyä vain prefiksejä, joiden mitta on korkeintaan $m+1$.

Siis vaihtoehto (ii) on myös mahdoton.

Täten taulu on aina äärellinen ja logiikan $\mathbf{K}$ ratkaisumenetelmä pysähtyy mille tahansa lauseelle P. ■

- Vastaava ratkaisumenetelmä toimii käsitellyille modaalilogiikoille, joiden kehykset eivät ole transitiivisia.
- Transitiivisuutta varten tarvitaan vahvempi lopetusehto (ts. ehto sille milloin haaran laajentaminen voidaan lopettaa).

Laskennallinen vaativuus

Tehtävänasettelut

- Mallintarkastus (onko lause tosi mallissa)
- Toteutuvuus (onko lauseella mallia)?
- Pätevyys
- Looginen seuraavuus

(i) Lause P on pätevä joss $\neg P$ *ei ole* toteutuva.

(ii) $\{\} \models_{\mathbf{L}} \{Q_1, \ldots Q_n\} \Longrightarrow P$ joss
$(Q_1 \wedge \cdots \wedge Q_n) \rightarrow P$ on pätevä joss
$Q_1 \wedge \cdots \wedge Q_n \wedge \neg P$ *ei ole* toteutuva.

Tarkastellaan mallintarkastusta ja toteutuvuutta.

Mallintarkastus

- Kaikilla käsittelyillä modaalilogiikoilla lauseen totuus annetun mallin annetussa maailmassa tarkastettavissa polynomisessa ajassa (suhteessa mallin ja lauseen kokoon).
- Näin ei ole kaikilla modaalilogiikoilla (esimerkiksi tietyt temporaalilogiikat).
- Kaikki ongelmat, jotka voidaan ratkaista polynomisessa ajassa, voidaan palauttaa propositionaaliseen mallintarkastukseen:
  Boolen piirin arvonlaskeminen **P**-täydellinen ongelma!

Toteutuvuus

- Lauselogiikalle **NP**-täydellinen.
  Kaikki modaalilogiikat sisältävät erikoistapauksena lauselogiikan.
  $\boxed{\Rightarrow}$ Ne ovat **NP**-kovia.
- Modaalilogiikoille $\mathbf{S5}, \mathbf{KD45}$: **NP**-täydellinen.
  Näille logiikoille löytyy aina pieni vastamalli: (maailmojen määrä $\simeq$ alilauseiden määrä).
  $\boxed{\Rightarrow}$ Toteutuvuus kuuluu luokkaan **NP**.
- Modaalilogiikoille $\mathbf{K}, \mathbf{T}, \mathbf{S4}$: **PSPACE**-täydellinen.
  Näille logiikoille vastamalli voi olla eksponentiaalinen lauseen kokoon nähden.
- Modaalilogiikoille $\mathbf{S5_n}, \mathbf{KD45_n}$: **PSPACE**-täydellinen.
- Modaalilogiikoille $\mathbf{S5_n^C}, \mathbf{KD45_n^C}$: **EXPTIME**-täydellinen.