**Taulumenetelmä modaalilogiikalle**

- On vaikeaa löytää Hilbert-tyylisiä todistuksia:
  Käytössä Modus Ponens -sääntö: jotta voidaan johtaa \( Q \), täytyy johtaa \( P \) ja \( P \rightarrow Q \). Mutta mikä on sopiva \( P \)?
  Esim. \( \{ A \rightarrow B, A \rightarrow C \} \vdash A \rightarrow (B \land C) \)
  1. \( A \rightarrow B \)
  2. \( A \rightarrow C \)
  ...
  \( n. \ \ (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \land C))) \)

- Alikavaaperiaate: lauseen \( Q \) todistuksessa tarvitaan vain \( Q \)n alikaavoja.

  ➔ resoluutio, sekkuntikalkkyyi, taulumenetelmä.

---

**Taulumenetelmä modaalilogiikalle K**

- Otetaan käyttöön prefiksit, joiden ideana on antaa nimiä
  mahdollisille maailmille siten, että nimistä voidaan nähä,
  voidaan nimetystä maailmasta saavuttaa toinen nimetty maailma.

- **Prefiksi** on ei-tyhjä äärellinen jonon luonnollisia lukuja. Esim. \( (1) \) ja
  \( \{1,1,1,111,2\} \) ovat prefikseja.

- **Prefiksoitu lause** on muotoa \( \sigma P \), missä \( \sigma \) on prefiksi ja \( P \) lause.
  (Idea: \( P \) on tosi maailmassa nimeltä \( \sigma \).) Esim. \( (1)(P \lor \neg P) \) ja
  \( \{1,1,1,1,111,2\} \lor \neg P \) ovat prefiksoituja lauseita.

- \( \sigma \alpha \) on prefiksi, joka saadaan prefiksistä \( \sigma \) liittämällä sen perään luku
  \( n \), Esim, jos \( \sigma = (1) \), \( \sigma 11 = (1,11) \).

- **Prefiksi muotoa \( \sigma \alpha \) on K-saavutettavissa prefiksistä \( \sigma \), Esim.
  \( \{1,11,11\} \) on K-saavutettavissa prefiksistä \( (1,11) \).

---

**Taulusäännöt**

Modaalilogiikkaa taulumenetelmä koostuu lauselogiikan säännöistä ja
moodalilsänneistä,

- Lauseologian säännöt (prefiksoihin lauseelle):

  \[
  \sigma \vdash \alpha \quad \alpha \equiv \alpha_1, \quad \alpha \equiv \alpha_2
  \]

  \[
  \frac{\sigma \vdash \alpha}{\sigma \vdash \alpha_1} \quad \frac{\sigma \vdash \alpha}{\sigma \vdash \alpha_2}
  \]

  Huom! Prefiksi ei muutu.

---

**Esimerkkejä**

1. \( (3,2,1) \vdash (\neg P \rightarrow Q) \rightarrow P \)
2. \( (3,2,1) \vdash (\neg P \rightarrow Q) \) \( (1) \)
3. \( (3,2,1) \vdash P \) \( (1) \)
4. \( (3,2,1) \vdash P \) \( (2) \)
5. \( (3,2,1) \vdash Q \) \( (2) \)
6. \( (3,2,1) \vdash P \) \( (4) \times \)

---

© 2003 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

© 2003 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio
**Modaalisäännöt**

Määritelmä. Prefiksi on haarassa
(i) tarjolla, jos se esiintyy haarassa,
(ii) rajoittamaton, jos ei ole minkään haarassa esintyyvän prefiksins
alkuosa.

Esim. Prefiksi \((1,1)\) on prefiksentä \((1,1,12,3)\) ja \((1,1)\) alkusa.

- **Modaalisäännöt**
  - □-sääntö:
    \[ \frac{\sigma ◦ P}{\sigma ◦ P} \]
    mille tahansa tarjolla olevalle prefiksille \(σ\),
  - ◯-sääntö:
    \[ \frac{\sigma ◯ P}{\sigma ◯ P} \]
    rajoittamattomalle prefiksille \(σ\).

**Taulutodistus**

Määritelmä.

- Taulun haara on suljettu, jos se sisältää sekä \(σP\) että \(σ^1P\) jollekin
  lauseelle \(P\) ja prefikssille \(σ\) tai jos se sisältää lauseen \(σ\) tai lauseen
  \(σ\)−T.
- Taulu on suljettu, jos jokainen sen haara on suljettu,
- Lauseen **P** kodistus on taulu, jonka juurena on \((1)\)−\(P\) ja joka on
  suljettu,

**Esimerkkejä**.

1. \((1)\)−\((\square P \to \square ◯ P)\)
2. \((1)\)\(\square P\)  \((1)\)
3. \((1)\)\(\square ◯ P\)  \((1)\)
4. \((1,1)\)\(\square ◯ P\)  \((3)\)
5. \((1,1)P\)  \((2)\)
6. \((1,1,1)\)−\(P\)  \((4)\)
7. \((1,2)\)−\(P\)  \((3)\)
8. \((1,2,3)\)−\(P\)  \((7)\)
9. \((1,2)P\)  \((2)\)

**Virheettömyys (soundius)**

**Teoreema.** Jos lauseelle $P$ löytyy todistus, lause $P$ on K-pätevä.

**Todistus.** (Seuraavan osatulosten avulla)

- Määritellään taululle $K$-toteutuva: taulu on $K$-toteutuva, jos sen jokin haara "vastaa" mallia.
- Osoitetaan, että (i) $K$-toteutuva taulu ei voi sulkeutua,
  (ii) jos $P$ ei ole $K$-pätevä, taulu $(1)\neg P$ on $K$-toteutuva,
  (iii) jokainen sääntö säilyttää $K$-toteutuvuuden: jos taulu on $K$-toteutuva, taulun säännön soveltamisesta, se on $K$-toteutuva myös säännön soveltamisen jälkeen.

Tällöin jos $P$ ei ole $K$-pätevä, lauseen $(1)\neg P$ taulu säilyy avoimena.

⇒ Jos taulu lauseelle $(1)\neg P$ on suljettu, lause $P$ on $K$-pätevä.

---

**Määritelmä.** Taulu on $K$-toteutuva, jos joku sen haaroista on $K$-toteutuva.

Taulun haara on $K$-toteutuva, jos haaraassa esiintyvien prefiksoitujen lauseiden joukko on $K$-toteutuva,

Prefiksoitujen lauseiden joukkoon $\Sigma$ on $K$-toteutuva, jos löytyy malli $M = (S,R,v)$ ja kuvaus $\lambda_P$ säännöksiä, prefikseistä prefikseistä joukolle $S$ s.e,

1. Jos prefiksit $\sigma$ ja $\tau$ esiintyvät joukossa $\Sigma$ ja $\tau$ on $K$-sääntettävissä prefiksiksi $\sigma$, tällöin $\lambda_P(\tau)$.
2. Jos $\sigma P \in \Sigma$, niin $M,\lambda_P(\tau)\models P$.

⇒ (i) $K$-toteutuva taulu ei voi sulkeutua,
⇒ (ii) Jos lause $P$ ei ole $K$-pätevä, taulu $(1)\neg P$ on $K$-toteutuva.

Näin on, koska lauseella $\neg P$ on malli $M = (S,R,v)$, jolle $M,\theta'$\models \neg P$. Tällöin haara $(\neg P)$ on $K$-toteutuva kuvaauksella $\lambda_P(\neg P) = \neg \lambda_P$.

⇒ $\Gamma'$ $K$-toteutuva.
• $\sigma \vdash P$, rajoittamattomalle prefiksille $\sigma n$.

Tällöin taulussa $\Gamma$ haara, jonka lausejoukko $\Sigma = \sum \{ \sigma n \vdash P \}$.
Koska $\sigma \vdash \Gamma \vdash \Sigma$, joten on olemassa $t$, $N(\sigma)\Gamma t$, $\Sigma t \vdash \Gamma P$.
Koska $\sigma n$ ei ole mikään $\sigma$ prefiks in alkuvosa, kuvausta $N$ voidaan laajentaa: $N(\sigma n) = t$, Tällöin $M, N(\sigma n) \vdash P$.

$\implies \Gamma \vdash K$-vastuu.

---

**Täydellisyys**

Miten taata, että jokaiselle pätevälle lauseelle löytyy taulutodistus, kun taulun haarat voivat olla ärettömät? Milloin sääntöjä on sovellettu riittävästi/reilusti?

$\implies$ Taulun rakentamisesta tarvitaan systemaattinen menetelmä, jossa kaikkia sääntöjä on käytetty riittävästi eli jokaiselle avoimelle haaralle $\Theta$ pätee:

(i) Jos $\sigma \vdash P \in \Theta$, tällöin $\sigma P \in \Theta$.
(ii) Jos $\sigma P \in \Theta$, tällöin $\sigma P_1 \in \Theta$ tai $\sigma P_2 \in \Theta$.
(iii) Jos $\sigma \in \Theta$, tällöin $\sigma P_1 \in \Theta$ ja $\sigma P_2 \in \Theta$.
(iv) Jos $\sigma \vdash P \in \Theta$, $\sigma n \vdash \Theta$, jollakin $n$.
(v) Jos $\sigma \vdash P \in \Theta$, $\sigma n Q \in \Theta$ kaikilla $\sigma n$, jotka tarjolla $\Theta$:ssa.

Huom! Systemaattinen menetelmä takaa täydellisyyn mutta voi sallia ärettömät taulut, jos ei todistettava lause ole pätevä.

**Ratkaisumenetelmä** takaa, että taulun rakentaminen päättyä ärellisellä askelmäärollalla, olipa todistettava lause pätevä tai ei.

---

**Teoreema. (Täydellisyys)** Jos $P$ on $K$-pätevä, lauseen $P$ systemaattinen $K$-taulu sulkeutuu,

**Todistus.** Osoitetaan, että jos lauseen $P$ systemaattisessa $K$-taulussa on avoin haara, $P$ ei ole $K$-pätevä.

Olko $\Theta$ valmiin systemaattisen taulun avoin haara ja olko $M = (S, R, v)$ seuraava malli (vastamalli),

$1.$ $S$ on $\Theta$:ssa esiintynyt prefiksien joukko,

$2.$ $\sigma R t$ jossa $t$ on $\sigma$-saayttetavissa $\sigma$-sta,

$3.$ $v(\sigma, Q) = \text{true}$ jos $\sigma Q$ esiintyy $\Theta$:ssa atomilauseelle $Q$.

Teoreema seuraa seuraavasta tuloksesta: jos $\sigma Q \in \Theta$, niin $M, \sigma \vdash Q$.

(Tällöin koska $(1: P)$ jokaisessa haarassa, $M, (1) \vdash P$, joten $P$ ei ole $K$-pätevä).
Todistetaan inductiolla lauseen $Q$ pituuden suhteen:

jos $\sigma Q \in \theta$, $M, \sigma \models Q$.

- (literaali) Jos $Q$ on atomilause ja $\sigma Q \in \theta$, niin $v(\sigma, Q) = \text{true}$ ja $M, \sigma \models Q$.

Jos $\neg Q \in \theta$, $Q$ on atomilause ja $\sigma Q \notin \theta$, Tällöin $M, \sigma \not\models Q$ ja $M, \sigma \models \neg Q$.

Induktiohypoteesi: Jos $Q$ on lyhyempi kuin $j$ ja $\sigma Q \in \theta$, tällöin $M, \sigma \models \neg j Q$.

Olkoon lauseen $Q$ pituus $j$. Nyt $Q$ on jokin seuraavista:

- (Muotoa $\neg \neg Q$) Jos $\neg \neg Q \in \theta$, tällöin $\sigma Q \in \theta$, $[H] M, \sigma \models Q$.

Tätten $M, \sigma \models \neg \neg Q$.

2. Ratkaisuproseduuri (lauseen $P$ $K$-pätevyydelle):

1. Taulun juureksi (1) $\rightarrow P$.

2. WHILE taulu ei suljettu eikä kaikkia lauseita merkittykysä DO BEGIN

2.1 Valitaan taulusta ylin kääntämätön solmu $\sigma Q$.

2.2 Jos $Q$ ei ole literaali, jakaiselle haaralle $\theta$, joka kulkee $\sigma Q$ kautta:

- Jos $\sigma Q$ on muotoa $\sigma \alpha$, lisätään haaran $\theta$ lopun ensin $\sigma \alpha_1$ ja sitten $\sigma \alpha_2$.

- Jos $\sigma Q$ on muotoa $\sigma \beta$, lisätään $\theta$.n loppupuksi lapisolmun $\sigma \beta_1$ ja $\sigma \beta_2$.

- Jos $\sigma Q$ on muotoa $\sigma \neg P$ lisätään haaran $\theta$ loppupuolku $\sigma \neg P$ jollekin tässä haarakkaajottamalle $\sigma n$ sekä tämän jälkeen $\sigma nX$ kulkelee

haarassa esiintyvälle $\sigma X$.

- Jos $\sigma Q$ on muotoa $\sigma P$, jakakkein tässä haarakasta tarjolla oleville $\sigma n$ lisätään

haarant $\theta$ loppupuolku $\sigma nP$.

2.3 Merkitään $\sigma Q$ käytettävä.

END.

3. Esimerkki. Tutkitaan taulumenetelmällä, onko $\square P \rightarrow \square \square P$ $K$-päteväs.

Rakennetaan $K$-taulu ratkaisuproseduurilla.

1. $\langle 1 \rangle \neg \langle 1 \rangle \neg \neg P$ (1)

2. $\langle 1 \rangle \neg \neg \neg P$ (1)

3. $\langle 1 \rangle \neg \neg \neg \neg P$ (1)

4. $\langle 1, 2 \rangle \neg \neg P$ (3)

5. $\langle 1, 2 \rangle P$ (2/3)

6. $\langle 1, 2, 3 \rangle \neg P$ (4)

Koska taulu jää auki, voidaan ajoimesta haarasta koota vastamallin

$M = \langle S, R, v \rangle$, missä $S = \{ \langle 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 2, 3 \rangle \}$

$R = \{ \langle 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 2, 3 \rangle \}$ ja $v(\sigma, P) = \text{true}$ jos $\sigma = \langle 1, 2 \rangle$.

Nyt $M, \langle 1 \rangle \not\models \neg \square \square P$. 

© 2003 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio
**Muut modaalilogiikat**

Laajennetaan edellä esitetty taulumenetelmä käsittelemään myös muita modaalilogiikkoita kuin K.

**Määritelmä.** Prefiksi \( \tau \) on prefiksin \( \sigma \) yksinkertainen jatko, jos \( \tau \) on muotoa \( \sigma \eta \) jollekin \( \eta \).

Taulumenetelmä modaalilogiikalle L:

-\( \Box \)-sääntö:

\[
\frac{\sigma \Box \eta}{\tau \Box \eta} \quad \frac{\sigma \eta}{\tau \eta}
\]

missä \( \tau \) on haarassa rajoittamaton prefiksin \( \sigma \) yksinkertainen jatko,

\( \Box \)-sääntö:

\[
\frac{\sigma \Box \eta}{\tau \Box \eta} \quad \frac{\sigma \Box \eta}{\tau \Box \eta}
\]

missä \( \tau \) L-saavutettavissa prefiksistä \( \sigma \) ja

1. logiikoihelle K, KB, K4
   \( \tau \) on tarjolla haarassa;

2. logiikoihille D, T, DB, B, D4, S4, S5
   (i) \( \tau \) on tarjolla haarassa tai
   (ii) \( \tau \) on rajoittamaton prefiksin \( \sigma \) yksinkertainen jatko.

**Määritelmä.** Prefiksien saavutettavuusrelaatio:

1. yleinen, jos \( \sigma \eta \) on saavutettavissa prefiksitä \( \sigma \) kaikilla \( \eta \);
2. käänteinen, jos \( \sigma \eta \) on saavutettavissa prefiksitä \( \sigma \eta \) kaikilla \( \eta \);
3. reflektiivinen, jos \( \sigma \eta \) on saavutettavissa \( \sigma \eta \):
4. transitiivinen, jos \( \sigma \eta \) saavutettavissa prefiksitä \( \sigma \) aina, kun \( \sigma \eta \) on \( \tau \eta \) alkuosa;
5. universalinen, jos prefiksi on saavutettavissa mistä tahansa prefiksistä,

---

**Logiikka L | L-saavutettavuus**

| K, D | yleinen |
| T    | yleinen, reflektiivinen |
| KB, DB | yleinen, käänteinen |
| B    | yleinen, reflektiivinen, käänteinen |
| K4, D4 | yleinen, transitiivinen |
| S4   | yleinen, reflektiivinen, transitiivinen |
| S5   | universali |
D-taulutodistus lauseelle $\square P \rightarrow \neg \neg P$,
1. $\langle 1 \rangle \neg (\square P \rightarrow \neg \neg P)$
2. $\langle 1 \rangle \square P$ (1)
3. $\langle 1 \rangle \neg \square \neg P$ (1)
4. $\langle 1 \rangle \neg \neg P$ (3)
5. $\langle 1, 2 \rangle \neg P$ (4) Huom. 2.(ii)
6. $\langle 1, 2 \rangle P$ (2)

×

K4-taulutodistus lauseelle $\square P \rightarrow \square \square P$,
1. $\langle 1 \rangle \neg (\square P \rightarrow \square \square P)$
2. $\langle 1 \rangle \square P$ (1)
3. $\langle 1 \rangle \neg \square \square P$ (1)
4. $\langle 1, 2 \rangle \neg P$ (3)
5. $\langle 1, 2, 3 \rangle \neg P$ (4)
6. $\langle 1, 2, 3 \rangle P$ (2) Huom. transit.

×

T-taulutodistus lauseelle $\square P \rightarrow P$,
1. $\langle 1 \rangle \neg (\square P \rightarrow P)$
2. $\langle 1 \rangle \square P$ (1)
3. $\langle 1 \rangle \neg P$ (1)
4. $\langle 1 \rangle P$ (2) Huom. refleksiosisys

×

KB-taulutodistus lauseelle $P \rightarrow \square \square P$,
1. $\langle 1 \rangle \neg (P \rightarrow \square \square P)$
2. $\langle 1 \rangle P$ (1)
3. $\langle 1 \rangle \neg \square \square P$ (1)
4. $\langle 1, 2 \rangle \neg \square P$ (3)
5. $\langle 1 \rangle \neg P$ (4) Huom. käänteisys

×
Systemaattinen L-taulu lauseelle $P$

Kuten logiikalle $K$, mutta kohta 2.2 tarkennettuna:
2.2 Jos $Q$ ei ole literaali, jokaiselle $\sigma Q$ kautta kulkeva luonnehmalle haaralle $\theta$:
- Jos $\sigma Q$ on muotoa $\sigma \circ \circ P \ (\sigma \circ P)$, lisätään haaran $\theta$ loppuun solmu $\sigma n \sim P$ ($\sigma n P$) jollekin tässä haarassa rajoittamattomalle $\sigma n$.
- Jos $\sigma Q$ on muotoa $\sigma \circ P \ (\sigma \circ \circ P)$,
  (a) kun $L$ on $K$, $KB$, $K4$, T, B, S4, S5,
   jokaiselle $\theta$sä tarjolla olevalle $\sigma'$, joka on $L$-saavutettavissa $\sigma$sta,
   lisätään $\theta$n loppuun solmu $\sigma' P \ (\sigma' P)$ ja lopuksi $\sigma \circ P \ (\sigma \circ P)$.
  (b) kun $L$ on $D$, $DB$, $D4$:
   jokaiselle $\theta$sä tarjolla olevalle $\sigma'$, joka on $L$-saavutettavissa $\sigma$sta,
   lisätään $\theta$n loppuun solmu $\sigma' P \ (\sigma' P)$. Jos tällaisia prefiksejä $\sigma'$ ei ole,
   lisätään $\theta$n loppuun solmu $\sigma n P \ (\sigma n P)$ jollekin tässä haarassa
   rajoittamattomalle $\sigma n$, Kummassakin tapauksessa lisätään vielä haaran
   loppuun $\sigma \circ P \ (\sigma \circ P)$.

© 2003 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

---

**Esimerkki.** SS-taulutqistus lauseelle

$\sim \sim \sim P \to \sim \sim \sim P$

1. $1 \sim \sim \sim P \to \sim \sim \sim P$
2. $1 \sim \sim \sim P$
3. $1 \sim \sim \sim P$
4. $2 \sim P$
5. $3 \sim \sim \sim P$
6. $3 \sim \sim \sim P$
7. $2 P$

© 2003 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

---

Systemaattinen menetelmä (SS-pätevyysta):

1. Taulun juureksi $1 \sim P$.
2. WHILE taulu ei suljettu eikä kaikkia lauseita merkitty käytetyiksi DO BEGIN
2.1 Valitään taulusta ylin käyttämätön solmu $nQ$.<br>
2.2 Jos $Q$ ei ole literaali, jokaiselle avoimelle haaralle $\theta$, joka kulkee $nQ$ kautta:
   - Jos $nQ$ muotoa $n \alpha$, lisätään haaran $\theta$ loppuun ensin $n \alpha_1$ ja sitten $n \alpha_2$.
   - Jos $nQ$ on muotoa $n \beta$, lisätään $\theta$n loppuun kaikki lapsisolmua $n \beta_1$ ja $n \beta_2$.
   - Jos $nQ$ on muotoa $n \circ P$, lisätään haaran $\theta$ loppuun solmu $k \sim P$ jollekin
     tässä haarassa rajoittamattomalle $k$ sekä tämän jälkeen $k \times$ kullekin
     haarassa esiintyvälle $f \times k$.
   - Jos $nQ$ on muotoa $n \circ P$, kaikille tässä haarassa tarjolla oleville $k$ lisätään
     haaran $\theta$ loppuun solmu $k \times P$.
2.3 Merkitään $nQ$ käytetyksi,
   END.

© 2003 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio
**KD45-taulut**

Prefikseinä riittävät luonnolliset luut.

\[ \neg \Box \text{-sääntö: } \frac{n \neg \Box P}{k \neg P} \quad \frac{n \Diamond P}{k P} \]

missä \( k \) ei esinyn haarassa.

\[ \Box \text{-sääntö: } \frac{n \Box P}{k P} \quad \frac{n \neg \Diamond P}{k \neg P} \]

mille tahansa \( k \neq 1 \).

---

**Esimerkki.** Vertaa,

\( (\Box P \rightarrow P) \):

1. \( \neg (\Box P \rightarrow P) \)
2. \( \Box P \) (1)
3. \( \neg \Box P \) (1)

\( \Box(\Box P \rightarrow P) \):

1. \( \neg (\Box P \rightarrow P) \)
2. \( \Box (\Box P \rightarrow P) \) (1)
3. \( 2 \Box P \) (2)
4. \( 2 \Box P \) (2)
5. \( 2 P \) (3)

\[ \times \]

---

**Looginen seuraavuus**

Tehtävä: \( \Sigma \models \Box \neg \neg P \rightarrow P \)

Taulumenetelmä: asetetaan taulun juureksi \( (1) \rightarrow P \) ja käytetään taulun

rakentamiseen L-logiikan mukaisia taulusääntöjä, joiden lisäksi voidaan

käyttää kahta uutta sääntöä premisseille:

**Globaali sääntö:** solmulla \( Q \) voidaan jatkaa mitä tahansa haaraa mille
tahansa haarassa tarjolla olevalla prefikseilla \( Q \) ja mille tahansa
globaalille premissille \( Q \in \Sigma \).

**Lokaali sääntö:** solmulla \( (1) Q \) voidaan jatkaa mitä tahansa haaraa

mille tahansa lokaalille premissille \( Q \in \Sigma \).

---

**Esimerkki.** \( \{ \} \models \Box P \rightarrow Q \rightarrow Q \):

1. \( (1) \neg Q \)
2. \( (1) \Box P \rightarrow Q \) (LP)
3. \( (1) \neg P \) (2)
4. \( (1) Q \) (2)
5. \( (1,2) \neg P \) (2)
6. \( (1,2) P \) (GP)

\[ \times \]