Modaalilogiikkojen todistusteoriaa

Todistusteoria: (syntaktinen) kalkyyli, jolla todetaan, onko annettu lause pätevä/seuraako lause loogisesti lausejoukosta.

$\boxed{\Rightarrow}$ Automatisointi

- Aksiomaattinen (Hilbert-tyyppinen) todistusteoria
- Luonnollisen päättelyn menetelmät
- Taulumenetelmät
- Resoluutio

Hilbert-tyylinen todistusteoria

Modaalilogiikalle $\mathbf{K}$:

Klassiset aksioomat: Kaikki tautologiat.

Modaaliaksioomat: Kaikki muotoa

$\Box(P \to Q) \to (\Box P \to \Box Q)$

olevat lauseet.

Modus Ponens -sääntö: $\dfrac{P, P \to Q}{Q}$

Välttämättömyyssääntö (N-sääntö): $\dfrac{P}{\Box P}$

Johto ja todistus

(Käsitellään ensin tapausta, jossa ei ole käytössä lokaaleja premissejä.)

Määritelmä. Lauseen P $\mathbf{K}$-*johto* lausejoukosta Σ on äärellinen jono lauseita $\phi_1, \ldots, \phi_n$ siten, että $\phi_n = P$ ja kaikille $i = 1, \ldots, n$

1. $\phi_i \in \Sigma$ tai
2. ϕ_i on joku $\mathbf{K}$:n aksioomeista tai
3. ϕ_i saadaan Modus Ponens -säännöllä tai N-säännöllä jonon aiemmista lauseista.

Merkintätapa: $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow P$ (tai $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} P$)

Lauseen P $\mathbf{K}$-*todistus* on lauseen P $\mathbf{K}$-johto tyhjästä lausejoukosta.

Merkintätapa: $\emptyset \vdash_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow P$ (tai $\vdash_{\mathbf{K}} P$)

Esimerkki. $\top \leftrightarrow \Box\top$ on $\mathbf{K}$-todistuva.

1.	$\top$	(Taut)
2.	$\Box\top \to (\top \to \Box\top)$	(Taut)
3.	$\Box\top$	(N, 1)
4.	$\top \to \Box\top$	(MP, 2, 3)
5.	$\top \to (\Box\top \to \top)$	(Taut)
6.	$\Box\top \to \top$	(MP, 1, 5)
7.	$(\Box\top \to \top) \to ((\top \to \Box\top) \to (\top \leftrightarrow \Box\top))$	(Taut)
8.	$(\top \to \Box\top) \to (\top \leftrightarrow \Box\top)$	(MP, 6, 7)
9.	$\top \leftrightarrow \Box\top$	(MP, 4, 8)

Johdettuja sääntöjä

R-sääntö

$$\frac{P \rightarrow Q}{\Box P \rightarrow \Box Q}$$

1.	$P \rightarrow Q$	(GP)
2.	$\Box(P \rightarrow Q)$	(N,1)
3.	$\Box(P \rightarrow Q) \rightarrow (\Box P \rightarrow \Box Q)$	(K)
4.	$\Box P \rightarrow \Box Q$	(MP,2,3)

Yleistetty R-sääntö

$$\frac{P_1 \wedge \cdots \wedge P_n \rightarrow Q}{\Box P_1 \wedge \cdots \wedge \Box P_n \rightarrow \Box Q}$$

R$\Diamond$-sääntö : $\dfrac{P \rightarrow Q}{\Diamond P \rightarrow \Diamond Q}$

1.	$P \rightarrow Q$	(GP)
2.	$(P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$	(Taut)
3.	$\neg Q \rightarrow \neg P$	(MP,1,2)
4.	$\Box\neg Q \rightarrow \Box\neg P$	(R,3)
5.	$(\Box\neg Q \rightarrow \Box\neg P) \rightarrow$ $(\neg\Box\neg P \rightarrow \neg\Box\neg Q)$	(Taut)
6.	$\neg\Box\neg P \rightarrow \neg\Box\neg Q$	(MP,4,5)

Virheettömyys

Todistusmenetelmän virheettömyys:
Jos lause on johdettavissa, se on myös looginen seuraus.

Teoreema. Jos $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow P$, $\Sigma \models_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow P$.

Todistus. Olkoon lauseelle P **K**-johto $\phi_1, \ldots, \phi_n (= P)$ lausejoukosta Σ.

Todistetaan induktiolla kaikille $i = 1, \ldots, n$, $\Sigma \models_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow \phi_i$ osoittamalla, että ϕ_i on pätevä jokaisessa mallissa, jossa Σ on pätevä.

Siis todistetaan induktiolla kaikille $i = 1, \ldots, n$, $\mathbf{C} \models \phi_i$,
missä $\mathbf{C} = \{M \mid M \models \Sigma\}$.

Induktiotodistus:

- $(i = 1)$
  Jos $\phi_1 \in \Sigma$, selvästi $\mathbf{C} \models \phi_1$.
  Jos ϕ_1 on klassinen tautologia tai muotoa $\Box(P \rightarrow Q) \rightarrow (\Box P \rightarrow \Box Q)$, $\mathbf{C} \models \phi_1$ jokaiselle mallijoukolle $\mathbf{C}$ [Mahd. maailmojen semantiikan perusteoreema]
- $(i > 1)$
  Kuten yllä, jos $\phi_i \in \Sigma$, on klassinen tautologia tai muotoa $\Box(P \rightarrow Q) \rightarrow (\Box P \rightarrow \Box Q)$, $\mathbf{C} \models \phi_i$.
  Jos ϕ_i on saatu jonon aiemmista lauseista MP- tai N-säännöllä, induktio-oletuksen mukaan ko. aiemmat lauseet ovat **C**-päteviä. Koska **C**-pätevien lauseiden joukko on suljettu MP- ja N-säännön suhteen [Mahd. maailmojen semantiikan perusteoreema], $\mathbf{C} \models \phi_i$.

Siis kaikille $i = 1, \ldots, n$, ϕ_i on **C**-pätevä, joten $\Sigma \models_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow \phi_i$.
Näin ollen $\Sigma \models_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow P (= \phi_n)$. ■

Täydellisyys

Todistusmenetelmän täydellisyys:
Jos lause looginen seuraus, se on myös johdettavissa.

Teoreema. Jos $\Sigma \models_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow P$, $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow P$.

Todistus. Oletetaan, että lauseelle P ei ole olemassa $\mathbf{K}$-johtoa lausejoukosta Σ.

Osoitetaan, että $\Sigma \models_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow P$ ei päde.

Tämä tehdään muodostamalla kanoninen malli $\mathcal{M}$:
kaikilla P, joille $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow P$ ei päde, on olemassa mallin maailma s, jossa $\mathcal{M}, s \not\Vdash P$.

Mallin maailmat maksimaalisesti konsistentteja lausejoukkoja, jotka konstruoidaan Lindenbaumin lemman avulla premissijoukosta Σ.

Äärellistä joukkoa $\mathbf{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ sanotaan *Σ-epäkonsistentiksi*, jos $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow \neg(\top \wedge A_1 \wedge \cdots \wedge A_n)$.

(Huom! Tyhjä joukko on Σ-epäkonsistentti, jos $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow \neg\top$.)

Joukkoa $\mathbf{A}$ sanotaan *Σ-konsistentiksi*, jos mikään sen äärellinen alijoukko ei ole Σ-epäkonsistentti.

Koska oletimme, että lauseelle P ei ole olemassa $\mathbf{K}$-johtoa lausejoukosta Σ, $\{\neg P\}$ on Σ-konsistentti. ($\emptyset$ on myös Σ-konsistentti, koska $\neg\top \rightarrow P$ on $\mathbf{K}$-todistuva/tautologia.)

1. Jos joukko S on Σ-konsistentti, niin on myös jokainen sen alijoukko.

   Jos jokin alijoukko ei olisi Σ-konsistentti, olisi olemassa sen Σ-epäkonsistentti alijoukko A, mutta $A \subseteq S$, joten S ei olisi Σ-konsistentti, ristiriita.

2. Jos joukko $\mathbf{A}$ on Σ-konsistentti ja $\neg\Box Z \in \mathbf{A}$, $\mathbf{A}^{\#} \cup \{\neg Z\}$ on myös Σ-konsistentti, missä $\mathbf{A}^{\#} = \{Q \mid \Box Q \in \mathbf{A}\}$.

   Oletetaan, että $\mathbf{A}^{\#} \cup \{\neg Z\}$ on Σ-epäkonsistentti.

   Tällöin on olemassa $\{A_1, \ldots, A_n\} \subseteq \mathbf{A}^{\#}$, jolle $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow \neg(\top \wedge A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \wedge \neg Z)$.

   (koska $\neg(\top \wedge A_1 \wedge \cdots \wedge A_n) \rightarrow \neg(\top \wedge A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \wedge \neg Z)$ on tautologia).

   Jatketaan johtoa:

1.	$\neg(\top \wedge A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \wedge \neg Z)$	
2.	$\neg\top \vee \neg A_1 \vee \cdots \vee \neg A_n \vee Z$	(Prop, 1)
3.	$(\top \wedge A_1 \wedge \cdots \wedge A_n) \rightarrow Z$	(Prop, 2)
4.	$(\Box\top \wedge \Box A_1 \wedge \cdots \wedge \Box A_n) \rightarrow \Box Z$	(GR, 3)
5.	$\Box\top \rightarrow ((\Box A_1 \wedge \cdots \wedge \Box A_n) \rightarrow \Box Z)$	(Prop, 4)
6.	$\top \rightarrow \Box\top$	(Ks. s. 4)
7.	$\top \rightarrow ((\Box A_1 \wedge \cdots \wedge \Box A_n) \rightarrow \Box Z)$	(Prop, 5, 6)
8.	$(\top \wedge \Box A_1 \wedge \cdots \wedge \Box A_n) \rightarrow \Box Z$	(Prop, 7)
9.	$\neg(\top \wedge \Box A_1 \wedge \cdots \wedge \Box A_n \wedge \neg\Box Z)$	(Prop, 8)

$\boxed{\Rightarrow}$ $\mathbf{A}$ on Σ-epäkonsistentti (ristiriita), joten $\mathbf{A}^{\#} \cup \{\neg Z\}$ Σ-konsistentti.

3. **Lindenbaumin Lemma.** Jokainen Σ-konsistentti joukko voidaan laajentaa maksimaalisesti Σ-konsistentiksi joukoksi.

(Γ on maksimaalisesti Σ-konsistentti, jos kaikilla $\Gamma' \supset \Gamma$, Γ' on Σ-epäkonsistentti.)

Olkoon **A** Σ-konsistentti.
Järjestetään kaikki modaalilauseet jonoon
$Q_0, Q_1, \ldots$ ja määritellään:

$\Delta_0 = \mathbf{A}$.

$$\Delta_i = \begin{cases} \Delta_{i-1} \cup \{Q_{i-1}\} & \text{jos } \Delta_{i-1} \cup \{Q_{i-1}\}\ \Sigma\text{-konsistentti} \\ \Delta_{i-1} \cup \{\neg Q_{i-1}\} & \text{muutoin} \end{cases}$$

$$\Delta = \bigcup_{i \geq 0} \Delta_i$$

(i) $\mathbf{A} \subseteq \Delta$

(ii) Kaikille $i = 0, 1, \ldots$ Δ_i on Σ-konsistentti.
Δ_0 on Σ-konsistentti.
Olkoon Δ_{i-1} on Σ-konsistentti.
Oletetaan, että Δ_i on Σ-epäkonsistentti.
Tällöin $\Delta_i = \Delta_{i-1} \cup \{\neg Q_{i-1}\}$ ja
$\Delta_{i-1} \cup \{Q_{i-1}\}$ on Σ-epäkonsistentti.
Siis on olemassa $\{A_1^+, \ldots, A_{n^+}^+\} \subseteq \Delta_{i-1}$, jolle
$\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow \neg(\top \wedge A_1^+ \wedge \cdots \wedge A_{n^+}^+ \wedge Q_{i-1})$
sekä $\{A_1^-, \ldots, A_{n^-}^-\} \subseteq \Delta_{i-1}$, jolle
$\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow \neg(\top \wedge A_1^- \wedge \cdots \wedge A_{n^-}^- \wedge \neg Q_{i-1})$

Jatketaan johtoja:

1. $\neg(\top \wedge A_1^+ \wedge \cdots \wedge A_{n^+}^+ \wedge Q_{i-1})$
2. $\neg(\top \wedge A_1^- \wedge \cdots \wedge A_{n^-}^- \wedge \neg Q_{i-1})$
3. $Q_{i-1} \rightarrow \neg(\top \wedge A_1^+ \wedge \cdots \wedge A_{n^+}^+)$ $(\text{Prop}, 1)$
4. $\neg Q_{i-1} \rightarrow \neg(\top \wedge A_1^- \wedge \cdots \wedge A_{n^-}^-)$ $(\text{Prop}, 2)$
5. $\neg(\top \wedge A_1^+ \wedge \cdots \wedge A_{n^+}^+) \vee$
   $\neg(\top \wedge A_1^- \wedge \cdots \wedge A_{n^-}^-)$ $(\text{Prop}, 3, 4)$
6. $\neg(\top \wedge A_1^+ \wedge \cdots \wedge A_{n^+}^+ \wedge$
   $A_1^- \wedge \cdots \wedge A_{n^-}^-)$ $(\text{Prop}, 5)$

$\boxed{\Rightarrow}$ Δ_{i-1} on Σ-epäkonsistentti, ristiriita.

(iii) Δ on Σ-konsistentti.
Oletetaan, että Δ on Σ-epäkonsistentti.
Siis on olemassa $\{A_1, \ldots, A_n\} \subseteq \Delta$, jolle
$\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow \neg(\top \wedge A_1 \wedge \cdots \wedge A_n)$.
On olemassa $i \geq 0$, jolle $\{A_1, \ldots, A_n\} \subseteq \Delta_i$.
$\boxed{\Rightarrow}$ Δ_i on Σ-epäkonsistentti, ristiriita.

(iv) Δ on maksimaalisesti Σ-konsistentti.
Olkoon $\Delta \cup \{Z\}$ Σ-konsistentti.
Koska $Z = Q_i$ jollakin i, $\Delta \cup \{Q_i\}$ on Σ-konsistentti.
Koska $\Delta_i \cup \{Q_i\} \subseteq \Delta \cup \{Q_i\}$, $\Delta_i \cup \{Q_i\}$ on Σ-konsistentti. [1.]
Siis $Z \in \Delta_{i+1} \subseteq \Delta$

(i-iv) $\boxed{\Rightarrow}$ Δ on maksimaalisesti Σ-konsistentti joukon **A** laajennus.

4. Kaikille maksimaalisesti Σ-konsistenteille joukoille Γ, (i) $\Sigma \subseteq \Gamma$ ja (ii) joko $Z \in \Gamma$ tai $\neg Z \in \Gamma$ kaikille lauseille Z.

   (i) Oletetaan $Z \in \Sigma - \Gamma$. Tällöin $\Gamma \cup \{Z\}$ on Σ-epäkonsistentti.

   Siis on olemassa $\{A_1, \ldots, A_n\} \subseteq \Gamma$, jolle
   $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow \neg(\top \wedge A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \wedge Z)$.

   Jatketaan todistusta:

   1. $\neg(\top \wedge A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \wedge Z)$
   2. $Z \rightarrow \neg(\top \wedge A_1 \wedge \cdots \wedge A_n)$ $(\mathrm{Prop}, 1)$
   3. Z (GP)
   4. $\neg(\top \wedge A_1 \wedge \cdots \wedge A_n)$ $(\mathrm{MP}, 2, 3)$

   Siis $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow \neg(\top \wedge A_1 \wedge \cdots \wedge A_n)$.

   $\boxed{\Rightarrow}$ Γ on Σ-epäkonsistentti, ristiriita ja $\Sigma \subseteq \Gamma$.

(ii) Koska Γ Σ-konsistentti, $\{Z, \neg Z\} \not\subseteq \Gamma$ ($\neg(\top \wedge Z \wedge \neg Z)$ tautologia). Oletetaan $Z \notin \Gamma$ ja $\neg Z \notin \Gamma$.

Siis on olemassa $\{A_1^+, \ldots, A_{n^+}^+\} \subseteq \Gamma$, jolle
$\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow \neg(\top \wedge A_1^+ \wedge \cdots \wedge A_{n^+}^+ \wedge Z)$
sekä $\{A_1^-, \ldots, A_{n^-}^-\} \subseteq \Gamma$, jolle $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow \neg(\top \wedge A_1^- \wedge \cdots \wedge A_{n^-}^- \wedge \neg Z)$.

Jatketaan johtoja:

1. $\neg(\top \wedge A_1^+ \wedge \cdots \wedge A_{n^+}^+ \wedge Z)$
2. $\neg(\top \wedge A_1^- \wedge \cdots \wedge A_{n^-}^- \wedge \neg Z)$
3. $Z \rightarrow \neg(\top \wedge A_1^+ \wedge \cdots \wedge A_{n^+}^+)$ $(\mathrm{Prop}, 1)$
4. $\neg Z \rightarrow \neg(\top \wedge A_1^- \wedge \cdots \wedge A_{n^-}^-)$ $(\mathrm{Prop}, 2)$
5. $\neg(\top \wedge A_1^+ \wedge \cdots \wedge A_{n^+}^+ \wedge A_1^- \wedge \cdots \wedge A_{n^-}^-)$ $(\mathrm{Prop}, 3, 4)$

$\boxed{\Rightarrow}$ Γ on Σ-epäkonsistentti, ristiriita ja joko $Z \in \Gamma$ tai $\neg Z \in \Gamma$ kaikille lauseille Z.

5. Konstruoidaan malli $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$.

   S: kaikkien maksimaalisesti Σ-konsistenttien joukkojen luokka.

   Kaikille $s, t \in S$: sRt joss $s^{\#} \subseteq t$.

   Kaikille atomilauseille Q: $v(s, Q) = \text{true}$ joss $Q \in s$.

6. Kaikille lauseille Q, kaikille $s \in S$: $\mathcal{M}, s \mid\mid\!\!- Q$ joss $Q \in s$.

   Todistus rakenteellisella induktiolla:

   - $\bot$:
     $\mathcal{M}, s \mid\mid\!\!\not- \bot$.
     Oletetaan, että $\bot \in s$. Koska $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow \neg(\top \wedge \bot)$, s on Σ-epäkonsistentti, ristiriita ja $\bot \notin s$.
   - $\neg Q$:
     $\mathcal{M}, s \mid\mid\!\!- \neg Q$ joss $\mathcal{M}, s \mid\mid\!\!\not- Q$ joss [IH] $Q \notin s$ joss [4.(ii)] $\neg Q \in s$.

     ...

- $\Box Q$: ($\Leftarrow$) Olkoon $\Box Q \in s$. Jos sRt, niin $s^{\#} \subseteq t$, $Q \in t$ ja $\mathcal{M}, t \mid\mid\!\!- Q$ [IH]. Siis $\mathcal{M}, s \mid\mid\!\!- \Box Q$.
  ($\Rightarrow$) Olkoon $\Box Q \notin s$. Tällöin $\neg \Box Q \in s$ [4.(ii)].
  Nyt $t_0 = s^{\#} \cup \{\neg Q\}$ on Σ-konsistentti [2.]
  [Lindenbaum] t_0:lla maks. Σ-konsistentti laajennus t.
  Nyt sRt, koska $s^{\#} \subseteq t$. Koska $\neg Q \in t_0 \subseteq t$, $Q \notin t$ [4.(ii)]. Siis $\mathcal{M}, t \mid\mid\!\!\not- Q$ [IH] ja $\mathcal{M}, s \mid\mid\!\!\not- \Box Q$.

7. Koska $\Sigma \subseteq s$ kaikille $s \in S$ [4.(i)], Σ on pätevä mallissa $\mathcal{M}$ [6.].

   Koska $\{\neg P\}$ on Σ-konsistentti, on olemassa sen maksimaalisesti Σ-konsistentti laajennus $t \in S$ ja $P \notin t$. Siis $\mathcal{M}, t \mid\mid\!\!\not- P$ [6.].

   Koska Σ on pätevä mallissa $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$ ja on olemassa $t \in S$ siten, että $\mathcal{M}, t \mid\mid\!\!\not- P$, väittämä $\Sigma \models_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow P$ ei päde.

$\boxed{\Rightarrow}$ Annettu modaalilogiikan $\mathbf{K}$ Hilbert-tyylinen todistusteoria on täydellinen. ■

Yleinen tapaus (lokaalit premissit mukana)

Määritelmä. $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$ tarkoittaa, että on olemassa lauseeseen P päättyvä lausejono, joka koostuu ensin tulevasta *globaalista osasta* ja sitä seuraavasta *lokaalista osasta*.

Globaalissa osassa jokainen lause

- on $\mathbf{K}$:n aksiooma, kuuluu lausejoukkoon Σ tai
- on saatu jonossa edellä olevista lauseista Modus Ponens tai N-säännöllä.

Lokaalissa osassa jokainen lause

- on $\mathbf{K}$:n aksiooma, kuuluu lausejoukkoon Υ tai
- on saatu jonossa edellä olevista lauseista Modus Ponens -säännöllä.

Esimerkki. $\{P, P \rightarrow Q\} \vdash_{\mathbf{K}} \{\Box Q \rightarrow R\} \Longrightarrow R$

1.	P	(GP)
2.	$P \rightarrow Q$	(GP)
3.	Q	(MP, 1, 2)
4.	$\Box Q$	(N, 3)
5.	$\Box Q \rightarrow R$	(LP)
6.	R	(MP, 4, 5)

Huom! N-sääntöä ei voi käyttää lokaalissa osassa.

Esim. $\{P, P \rightarrow Q\} \vdash_{\mathbf{K}} \{\Box Q \rightarrow R\} \Longrightarrow \Box R$ ei päde.

Johtojen ominaisuuksia

- Johdot ovat äärellisiä.

  $\boxed{\Rightarrow}$ *Kompaktius* ($\vdash$):

  Jos $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$, niin on olemassa äärellisen joukot $\Sigma' \subseteq \Sigma$ ja $\Upsilon' \subseteq \Upsilon$, joille $\Sigma' \vdash_{\mathbf{K}} \Upsilon' \Longrightarrow P$.
- MP- ja N-sääntö monotonisia.

  $\boxed{\Rightarrow}$ *Monotonisuus* ($\vdash$):

  Olkoon $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2$ ja $\Upsilon_1 \subseteq \Upsilon_2$. Tällöin jos $\Sigma_1 \vdash_{\mathbf{K}} \Upsilon_1 \Longrightarrow P$, niin $\Sigma_2 \vdash_{\mathbf{K}} \Upsilon_2 \Longrightarrow P$
- *Lokaali deduktioteoreema* ($\vdash$):

  $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \Upsilon \cup \{Q\} \Longrightarrow P$ joss $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow Q \rightarrow P$.

Virheettömyys ja täydellisyys

Teoreema. $\Sigma \models_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

Todistus. ($\Rightarrow$) Olkoon $\Sigma \models_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

- Kompaktius ($\models$):

  On olemassa äärelliset joukot $\Sigma' \subseteq \Sigma$ ja $\Upsilon' = \{\phi_1, \ldots, \phi_n\} \subseteq \Upsilon$ siten, että $\Sigma' \models_{\mathbf{K}} \Upsilon' \Longrightarrow P$.
- Lokaali deduktioteoreema ($\models$):

  $\Sigma' \models_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow \phi_1 \rightarrow (\phi_2 \rightarrow \cdots \rightarrow (\phi_n \rightarrow P) \cdots)$.
- Täydellisyysteoreema: $\Sigma' \vdash_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow \phi_1 \rightarrow (\cdots \rightarrow (\phi_n \rightarrow P) \cdots)$.
- Lokaali deduktioteoreema ($\vdash$): $\Sigma' \vdash_{\mathbf{K}} \Upsilon' \Longrightarrow P$.
- Monotonisuus ($\vdash$): $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

($\Leftarrow$) Olkoon $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

- Kompaktius ($\vdash$):

  On olemassa äärelliset joukot $\Sigma' \subseteq \Sigma$ ja $\Upsilon' = \{\phi_1, \ldots, \phi_n\} \subseteq \Upsilon$ siten, että $\Sigma' \vdash_{\mathbf{K}} \Upsilon' \Longrightarrow P$.
- Lokaali deduktioteoreema ($\vdash$):
  $\Sigma' \vdash_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow \phi_1 \to (\cdots \to (\phi_n \to P)\cdots)$.
- Täydellisyysteoreema: $\Sigma' \models_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow \phi_1 \to (\cdots \to (\phi_n \to P)\cdots)$.
- Lokaali deduktioteoreema ($\models$): $\Sigma' \models_{\mathbf{K}} \Upsilon' \Longrightarrow P$.
- Monotonisuus ($\models$): $\Sigma \models_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

$\blacksquare$

Modaalilogiikka T

$\mathbf{T}$ on refleksiivisten kehysten joukko.

Modaalilogiikan $\mathbf{T}$ karakteristinen lause

T: $\Box P \to P$

Propositio. $\Sigma \models_{\mathbf{T}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss $\Sigma \cup [\![\mathrm{T}]\!] \models_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

$\boxed{\Rightarrow}$ ($\mathbf{K}$:n virheettömyys- ja täydellisyysteoreema)

Propositio. $\Sigma \models_{\mathbf{T}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss $\Sigma \cup [\![\mathrm{T}]\!] \vdash_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

Hilbert-tyylinen todistusteoria modaalilogiikalle $\mathbf{T}$:

Klassiset aksioomat: Kaikki tautologiat.

Modaaliaksioomat: Kaikki muotoa

K: $\Box(P \to Q) \to (\Box P \to \Box Q)$

T: $\Box P \to P$

olevat lauseet.

Modus Ponens -sääntö

N-sääntö

$\boxed{\Rightarrow}$

Propositio. $\Sigma \models_{\mathbf{T}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss $\Sigma \vdash_{\mathbf{T}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

Modaalilogiikka S5

S5 on ekvivalenttisten kehysten joukko.

Propositio. $\Sigma \models_{\mathbf{S5}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss $\Sigma \cup [\![\mathrm{T}]\!] \cup [\![4]\!] \cup [\![\mathrm{B}]\!] \vdash_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss $\Sigma \cup [\![\mathrm{T}]\!] \cup [\![4]\!] \cup [\![5]\!] \vdash_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss $\Sigma \cup [\![\mathrm{T}]\!] \cup [\![5]\!] \vdash_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

Hilbert-tyylinen todistusteoria modaalilogiikalle $\mathbf{S5}$:

Modaaliaksioomat: Kaikki muotoa

K: $\Box(P \to Q) \to (\Box P \to \Box Q)$

T: $\Box P \to P$

$4: \Box P \to \Box\Box P$

$5: \neg\Box P \to \Box\neg\Box P$

olevat lauseet.

Propositio. $\Sigma \models_{\mathbf{S5}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss $\Sigma \vdash_{\mathbf{S5}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

Modaalilogiikka KD45

KD45 on sarjallisien, transitiivisten ja euklidisten kehysten joukko.

Propositio. $\Sigma \models_{\mathbf{KD45}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss $\Sigma \cup [\![\mathrm{D}]\!] \cup [\![4]\!] \cup [\![5]\!] \vdash_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

Hilbert-tyylinen todistusteoria modaalilogiikalle **KD45**:

Modaaliaksioomat: Kaikki muotoa

K: $\Box(P \to Q) \to (\Box P \to \Box Q)$
D : $\Box P \to \Diamond P$
4 : $\Box P \to \Box\Box P$
5 : $\neg\Box P \to \Box\neg\Box P$
olevat lauseet.

Propositio. $\Sigma \models_{\mathbf{KD45}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss $\Sigma \vdash_{\mathbf{KD45}} \Upsilon \Longrightarrow P$.