# Esimerkkimodaalilogiikkoja

- Käsitellään esimerkkeinä kehyslogiikkoja
- Valitaan joukko $\mathbf{L}$ kehyksiä $\langle S,R\rangle$
  (tyypillisesti antamalla relaatiolle $R$ jokin ominaisuus; esim. refleksiivisten kehysten joukko sisältää kaikki kehykset $\langle S,R\rangle$, joissa $R$ refleksiivinen).
- $\mathbf{L}$-pätevien lauseiden joukko:
  1. sisältää kaikki tautologiat;
  2. sisältää lauseen $Q$ aina, kun siihen kuuluvat $P$ ja $P \to Q$;
  3. on suljettu sijoituksen suhteen;
  4. sisältää muotoa $\Box(P \to Q) \to (\Box P \to \Box Q)$ olevat lauseet;
  5. sisältää lauseen $\Box P$ aina, kun siihen kuuluu $P$.

  $\boxed{\Rightarrow}$ $\mathbf{L}$-pätevien lauseiden joukko on normaali propositionaalinen modaalilogiikka (modaalilogiikka $\mathbf{L}$).

© 2003 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio



# Sijoitusesiintymät

**Määritelmä.** Jos $\Sigma$ on joukko lauseita, $[\![\Sigma]\!]$ on joukkoon $\Sigma$ kuuluvien lauseiden kaikkien sijoitusesiintymien joukko.

- Esim. Jos $\Sigma = \{P \to P\}$, $[\![\Sigma]\!]$ sisältää mm. lauseet
  $P \to P$
  $\neg P \to \neg P$
  $\Box\Box Q \to \Box\Box Q$
  $(\Box(P \to Q) \to (\Box P \to \Box Q)) \to (\Box(P \to Q) \to (\Box P \to \Box Q))$
- Jatkossa annetaan tietyille lauseille nimiä.
  Esim. I: $P \to P$
- Ko. lauseen sijoitusesiintymien joukkoa merkitään $[\![\mathrm{I}]\!]$
  ja tällä tarkoitetaan siis joukkoa $[\![\{P \to P\}]\!]$.

© 2003 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio



# Modaalilogiikka K

- Olkoon $\mathbf{K}$ kaikkien kehysten joukko.
- $\mathbf{K}$ heikoin normaali modaalilogiikka: jos lause on $\mathbf{K}$-pätevä, se on $\mathbf{L}$-pätevä, jokaisella normaalilla modaalilogiikalla $\mathbf{L}$.
- Karakteristinen lause K: $\Box(P \to Q) \to (\Box P \to \Box Q)$
- Jokainen joukon $[\![\mathrm{K}]\!]$ lause on $\mathbf{K}$-pätevä [Mahdollisten maailmojen semantiikan perusteoreema, kohta 2]
  (Olkoon $\mathcal{M},s \;||\!-\; \Box(P \to Q)$. Tällöin kaikille $t$, joille $sRt$,
  $\mathcal{M},t \;||\!-\; P \to Q$. Jos $\mathcal{M},s \;||\!-\; \Box P$, kaikille $t$, joille $sRt$, $\mathcal{M},t \;||\!-\; P$.
  Tällöin kaikille $t$, joille $sRt$, $\mathcal{M},t \;||\!-\; Q$ ja $\mathcal{M},s \;||\!-\; \Box Q$.
  Siis $\mathcal{M},s \;||\!-\; \Box(P \to Q) \to (\Box P \to \Box Q)$.)

© 2003 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio



# Modaalilogiikka T

- $\mathbf{T}$: refleksiivisten kehysten joukko.
  (Kehys $\langle S,R\rangle$ on refleksiivinen, jos $\forall x(xRx)$ tosi kehyksessä).
- Esimerkiksi jos $\Box$ tarkoittaa tietämistä, kehysten refleksiivisyys on luontevaa: jos agentti tietää, että $P$, $P$ on totta.
  - Olkoon $\langle S,R,v\rangle,s \;||\!-\; \Box P$.
  - Jotta myös $\langle S,R,v\rangle,s \;||\!-\; P$, riittää, että $R$ on refleksiivinen:
    Jos $\langle S,R,v\rangle,s \;||\!-\; \Box P$,
    kaikilla $t \in S$, joille $sRt$, $\langle S,R,v\rangle,t \;||\!-\; P$.
    Kun $R$ refleksiivinen, $sRs$ ja $\langle S,R,v\rangle,s \;||\!-\; P$.

© 2003 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

# Modaalilogiikka T

Modaalilogiikan $\mathbf{T}$ karakteristinen lause
T: $\Box P \rightarrow P$
on pätevä kehyksessä joss kehys on refleksiivinen.

$\boxed{\Rightarrow}$ $\mathbf{T} = \mathbf{K} + [\![\mathrm{T}]\!]$

**Propositio.** $\Sigma \models_{\mathbf{T}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss $\Sigma \cup [\![\mathrm{T}]\!] \models_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

**Todistus.** ($\Leftarrow$) Olkoon $\Sigma \cup [\![\mathrm{T}]\!] \models_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

Koska $\mathbf{T} \subseteq \mathbf{K}$, $\Sigma \cup [\![\mathrm{T}]\!] \models_{\mathbf{T}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

Lauseet $[\![\mathrm{T}]\!]$ ovat $\mathbf{T}$-päteviä (ks. ed. luento).

Siis $\Sigma \models_{\mathbf{T}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

© 2003 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio



($\Rightarrow$) Oletetaan, että $\Sigma \cup [\![\mathrm{T}]\!] \models_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$ ei päde.

On olemassa malli $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$ siten, että lauseet $\Sigma \cup [\![\mathrm{T}]\!]$ ovat päteviä tässä mallissa ja tässä mallissa on maailma $s$, jossa $\langle S, R, v \rangle, s \,||\!-\, \Upsilon \cup \{\neg P\}$.

Olkoon $R^* = R \cup \{\langle s, s \rangle, s \in S\}$. Osoitetaan, että jokaiselle lauseelle $Q$ ja maailmalle $s \in S$: $\langle S, R, v \rangle, s \,||\!-\, Q$ joss $\langle S, R^*, v \rangle, s \,||\!-\, Q$ induktiolla lauseen $Q$ rakenteen suhteen:

- Lause on atomilause $Q$:
  $\langle S, R, v \rangle, s \,||\!-\, Q$ joss $\langle S, R^*, v \rangle, s \,||\!-\, Q$.
- Lause on muotoa $\neg Q$:
  $\langle S, R, v \rangle, s \,||\!-\, \neg Q$ joss $\langle S, R, v \rangle, s \not||\!-\, Q$ joss (induktio-oletuksella)
  $\langle S, R^*, v \rangle, s \not||\!-\, Q$ joss $\langle S, R^*, v \rangle, s \,||\!-\, \neg Q$
  ...

© 2003 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio



- Lause on muotoa $\Box Q$:
  ($\Leftarrow$) Jos $\langle S, R, v \rangle, s \not||\!-\, \Box Q$, on olemassa $t$, jolle $sRt$, $\langle S, R, v \rangle, t \not||\!-\, Q$.
  Induktio-oletuksella $\langle S, R^*, v \rangle, t \not||\!-\, Q$.
  Nyt $sR^*t$ ja $\langle S, R^*, v \rangle, s \not||\!-\, \Box Q$.
  ($\Rightarrow$) Jos $\langle S, R^*, v \rangle, s \not||\!-\, \Box Q$, on olemassa $t$, jolle $sR^*t$, $\langle S, R^*, v \rangle, t \not||\!-\, Q$.
  1. Jos $t \neq s$, $sRt$ ja $\langle S, R, v \rangle, s \not||\!-\, \Box Q$.
  2. Jos $t = s$, $\langle S, R, v \rangle, s \not||\!-\, Q$.
     Koska $\Box Q \rightarrow Q$ on pätevä mallissa $\langle S, R, v \rangle$, $\langle S, R, v \rangle, s \not||\!-\, \Box Q$.

Siis $\langle S, R^*, v \rangle \models \Sigma \cup [\![\mathrm{T}]\!]$ ja $\langle S, R^*, v \rangle, s \,||\!-\, \Upsilon \cup \{\neg P\}$.
$\boxed{\Rightarrow}$ Koska $\langle S, R^* \rangle$ on refleksiivinen kehys, myöskään $\Sigma \models_{\mathbf{T}} \Upsilon \Longrightarrow P$ ei päde. ■

© 2003 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio



# Mallien relaatioiden ominaisuuksia

Kehyksen ominaisuuksia ja vastaavia modaalilogiikan lauseita:

1. Refleksiivisyys:
   $\forall s(sRs)$ $\quad$ $\Box A \rightarrow A$
2. Symmetrisyys:
   $\forall s \forall t(sRt \rightarrow tRs)$ $\quad$ $A \rightarrow \Box \Diamond A$
3. Sarjallisuus:
   $\forall s \exists t(sRt)$ $\quad$ $\Box A \rightarrow \Diamond A$
4. Transitiivisuus:
   $\forall s \forall t \forall u(sRt \wedge tRu \rightarrow sRu)$ $\quad$ $\Box A \rightarrow \Box \Box A$
5. Euklidisuus:
   $\forall s \forall t \forall u(sRt \wedge sRu \rightarrow tRu)$ $\quad$ $\neg \Box A \rightarrow \Box \neg \Box A$

© 2003 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

## Mallien relaatioiden ominaisuuksia

6. Osittain funktionaalinen:

$\forall s \forall t \forall u(sRt \wedge sRu \rightarrow t = u)$ $\quad \Diamond A \rightarrow \Box A$

7. Funktionaalinen:

$\forall s \exists ! t(sRt)$ $\quad \Diamond A \leftrightarrow \Box A$

8. Heikosti tiheä:

$\forall s \forall t(sRt \rightarrow \exists u(sRu \wedge uRt))$ $\quad \Box\Box A \rightarrow \Box A$

9. Heikosti kytketty:

$\forall s \forall t \forall u(sRt \wedge sRu \rightarrow$ $\quad \Box(A \wedge \Box A \rightarrow B) \vee$

$tRu \vee t = u \vee uRt)$ $\quad \Box(B \wedge \Box B \rightarrow A)$

10. Heikosti suunnattu:

$\forall s \forall t \forall u(sRt \wedge sRu \rightarrow \exists v(tRv \wedge uRv))$ $\quad \Diamond\Box A \rightarrow \Box\Diamond A$

© 2003 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio



**Teoreema.** Olkoon $\mathcal{F} = \langle S, R \rangle$ jokin kehys. Silloin kullekin ominaisuuksista 1–10, jos $R$ täyttää ominaisuuden, niin vastaavan lauseen kaikki sijoitusesiintymät ovat päteviä $\mathcal{F}$:ssä.

**Todistus.**

2. Olkoon $R$ symmetrinen. Osoitetaan, että $\langle S, R \rangle \models [\![A \rightarrow \Box\Diamond A]\!]$.
   Vastaoletus: löytyy sijoitusesiintymä $A \rightarrow \Box\Diamond A$, jolle $\langle S, R \rangle \not\models A \rightarrow \Box\Diamond A$.
   Tällöin löytyy malli $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$ ja maailma $s \in S$, jossa $\mathcal{M}, s \Vdash A$ ja $\mathcal{M}, s \nVdash \Box\Diamond A$.
   Siis on olemassa $t$, jolle $sRt$ ja $\mathcal{M}, t \nVdash \Diamond A$. Täten kaikilla $t'$, $tRt'$, $\mathcal{M}, t' \nVdash A$. Koska $R$:n symmetrinen, $tRs$ ja siis $\mathcal{M}, s \nVdash A$, ristiriita.
   Siis vastaoletus ei päde ja $\langle S, R \rangle \models [\![A \rightarrow \Box\Diamond A]\!]$ pätee.

Loput kohdat samaan tapaan. ■

© 2003 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio



**Teoreema.** Kun kehyksessä $\mathcal{F} = \langle S, R \rangle$ jonkin lauseista 1–10 kaikki sijoitusesiintymät ovat päteviä, niin $R$ täyttää vastaavan ominaisuuden.

**Todistus.**

6. Oslt. funkt. $(\forall s \forall t \forall u(sRt \wedge sRu \rightarrow t = u))$ vs. $\Diamond A \rightarrow \Box A$:
   Olkoon $\langle S, R \rangle \models [\![\Diamond A \rightarrow \Box A]\!]$.
   Vastaoletus: $R$ ei ole osittain funktionaalinen. Tällöin on olemassa $s, t, u \in S$ siten, että $sRt, sRu$, mutta $t \neq u$.
   Valitaan valuaatio $v$, jossa atomilauseelle $P$: $v(t, P) = \text{true}$ ja $v(u, P) = \text{false}$. Nyt $\langle S, R, v \rangle, s \Vdash \Diamond P$ ja $\langle S, R, v \rangle, s \nVdash \Box P$. Siis $\langle S, R \rangle \not\models \Diamond P \rightarrow \Box P$.
   Siis kaikki lauseen $\Diamond A \rightarrow \Box A$ sijoitusesiintymät eivät ole päteviä kehyksessä $\langle S, R \rangle$. Tämä on ristiriidassa alkuoletukseen, joten vastaoletus ei päde ja $R$ on ositt. funktionaalinen.

Loput kohdat samaan tapaan. ■

© 2003 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio



## Modaalilogiikka K4

**K4** on transitiivisten kehysten joukko.

Karakteristinen lause

$4 : \Box P \rightarrow \Box\Box P$ (positiivinen itsetutkiskelu)

**Propositio.** $\Sigma \models_{\mathbf{K4}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss $\Sigma \cup [\![4]\!] \models_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

## Modaalilogiikka S4

**S4** on transitiivisten ja refleksiivisten kehysten joukko.

**Propositio.** $\Sigma \models_{\mathbf{S4}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss $\Sigma \cup [\![4]\!] \cup [\![\mathrm{T}]\!] \models_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

© 2003 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

## Modaalilogiikka KB

**KB** on symmetristen kehysten joukko.

Karakteristinen lause

B : $P \rightarrow \Box\Diamond P$

**Propositio.** $\Sigma \models_{\mathbf{KB}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss $\Sigma \cup [\![\mathrm{B}]\!] \models_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

## Modaalilogiikka B

**B** on symmetristen ja refleksiivisten kehysten joukko.

**Propositio.** $\Sigma \models_{\mathbf{B}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss $\Sigma \cup [\![\mathrm{B}]\!] \cup [\![\mathrm{T}]\!] \models_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

$\boxed{\Rightarrow}$ **KBT**

© 2003 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio



## Modaalilogiikka S5

**S5** on ekvivalenttisten (symmetristen, refleksiivisten ja transitiivisten) kehysten joukko.

Karakteristinen lause

5 : $\neg\Box P \rightarrow \Box\neg\Box P$ (Negatiivinen itsetutkiskelu)

**Propositio.**
$\Sigma \models_{\mathbf{S5}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss
$\Sigma \cup [\![\mathrm{T}]\!] \cup [\![4]\!] \cup [\![\mathrm{B}]\!] \models_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss
$\Sigma \cup [\![\mathrm{T}]\!] \cup [\![4]\!] \cup [\![5]\!] \models_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss
$\Sigma \cup [\![\mathrm{T}]\!] \cup [\![5]\!] \models_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

Välttämättömyyden ja ideaalisen tietämisen logiikka.

© 2003 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio



### Modaalilogiikka D

**D** on sarjallisten kehysten joukko.

Karakteristinen lause
D : $\Box P \rightarrow \Diamond P$
$\Sigma \models_{\mathbf{D}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss $\Sigma \cup [\![\mathrm{D}]\!] \models_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

### Modaalilogiikka D4

**D4** on sarjallisten ja transitiivisten kehysten joukko.

$\Sigma \models_{\mathbf{D4}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss $\Sigma \cup [\![\mathrm{D}]\!] \cup [\![4]\!] \models_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

### Modaalilogiikka DB

**DB** on sarjallisten ja symmetristen kehysten joukko.

$\Sigma \models_{\mathbf{DB}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss $\Sigma \cup [\![\mathrm{D}]\!] \cup [\![\mathrm{B}]\!] \models_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

© 2003 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio



## Uskomisen logiikka

Se mitä uskotaan ei ole välttämättä totta.

$\boxed{\Rightarrow}$ Kehykset eivät ole välttämättä refleksiivisiä.

Otetaan positiivinen ja negatiivinen itsetutkiskelu.

$\boxed{\Rightarrow}$ Modaalilogiikka **K45**.

Mutta $\neg\Box\bot$ ei ole **K45**-pätevä. ($\langle\{s\}, \emptyset, v\rangle, s \Vdash \Box\bot$)

Vaaditaan lisäksi sarjallisuus.

$\boxed{\Rightarrow}$ Modaalilogiikka **KD45**
(sarjalliset, transitiiviset ja euklidiset kehykset).
HUOM! Transitiivisuus ei ole redundanttia: $\Box P \rightarrow \Box\Box P$ ei ole pätevä sarjallisten ja euklidisten kehysten joukossa (**KD5**-pätevä).

© 2003 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

- $\neg\Box\bot$ on **KD45**-pätevä.
- $\Box P \rightarrow P$ ei ole **KD45**-pätevä.
- $\Box(\Box P \rightarrow P)$ on **KD45**-pätevä.
  Olkoon $\langle S,R\rangle$ **KD45**-kehys.
  Olkoon $s \in S$ ja $sRt$.
  Euklidisuus: $tRt$ ($sRt$ ja $sRt$).
  Joten kaikilla $t$, joilla $sRt$, $tRt$.
  Nyt $\langle S,R,v\rangle, s \mid\!\mid\!- \Box(\Box P \rightarrow P)$,
  koska kaikilla $t$, joilla $sRt$,
  $\langle S,R,v\rangle, t \mid\!\mid\!- \Box P \rightarrow P$.

© 2003 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio



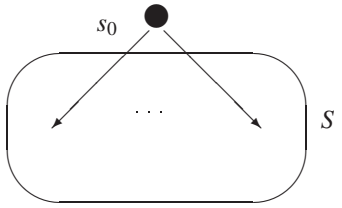
## Yksinkertaisempi kehysluokka: S5 ja KD45

Modaalilogiikan **S5** kehyksiksi riittävät *universaalikehykset*, so. kehykset $\langle S,R\rangle$, joissa $R = \{\langle s,t\rangle \mid s,t \in S\}$.

**Propositio.** Jos lause $P$ on tosi **S5**-kehykseen perustuvassa mallissa, $P$ on tosi myös universaalikehykseen perustuvassa mallissa.

**Propositio.** Jos lause $P$ on tosi **KD45**-kehykseen perustuvassa mallissa, $P$ on tosi mallissa muotoa $M' = \langle \{s_0\} \cup S, \{\langle s,t\rangle \mid s \in \{s_0\} \cup S, t \in S\}, v\rangle$.

$M'$:




© 2003 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio



## Deduktioteoreema ja kompaktius

- Kaikilla edellä mainituilla logiikoilla globaali deduktioteoreema pätee:
  $\Sigma \cup \{Q\} \models_{\mathbf{L}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss
  jollekin $n$ $\Sigma \models_{\mathbf{L}} \Upsilon \cup \{\Box^0 Q, \Box^1 Q, \ldots, \Box^n Q\} \Longrightarrow P$.
- Logiikat ovat kompakteja:
  Jos $\Sigma \models_{\mathbf{L}} \Upsilon \Longrightarrow P$, niin on olemassa äärelliset joukot $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ ja $\Upsilon_0 \subseteq \Upsilon$ siten, että $\Sigma_0 \models_{\mathbf{L}} \Upsilon_0 \Longrightarrow P$.
- Näin ei ole kuitenkaan kaikilla modaalilogiikoilla eikä edes kehyslogiikoilla.

© 2003 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio



## Modaalilogiikka GL

**GL** on transitiivisten, irrefleksiivisten ja äärellisten kehysten joukko (tai transitiivisten kehysten joukko, joissa ei ole ääretöntä ketjua saavutettavia maailmoja).

Tämä ei vastaa mitään (ensimmäisen kertaluvun) predikaattilogiikan lauseella ilmaistavaa kehysten ominaisuutta.

Karakteristinen lause

$\mathbf{GL}: \Box(\Box P \rightarrow P) \rightarrow \Box P$

Globaali deduktioteoreema ei päde eikä **GL** ole kompakti.

Jos $\Sigma$ ja $\Upsilon$ ovat äärellisiä lausejoukkoja, $\Sigma \models_{\mathbf{GL}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss
$\Sigma \cup [\![\mathrm{GL}]\!] \models_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

© 2003 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio