Esimerkkimodaalilogiikkoja

- Käsitellään esimerkkeinä kehyslogiikkoja
- Valitaan joukko $\mathbf{L}$ kehyksiä $\langle S,R\rangle$
  (tyypillisesti antamalla relaatiolle R jokin ominaisuus; esim. refleksiivisten kehysten joukko sisältää kaikki kehykset $\langle S,R\rangle$, joissa R refleksiivinen).
- $\mathbf{L}$-pätevien lauseiden joukko:
  1. sisältää kaikki tautologiat;
  2. sisältää lauseen Q aina, kun siihen kuuluvat P ja $P \rightarrow Q$;
  3. on suljettu sijoituksen suhteen;
  4. sisältää muotoa $\Box(P \rightarrow Q) \rightarrow (\Box P \rightarrow \Box Q)$ olevat lauseet;
  5. sisältää lauseen $\Box P$ aina, kun siihen kuuluu P.

  $\boxed{\Rightarrow}$ $\mathbf{L}$-pätevien lauseiden joukko on normaali propositionaalinen modaalilogiikka (modaalilogiikka $\mathbf{L}$).

© 2003 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

Sijoitusesiintymät

Määritelmä. Jos Σ on joukko lauseita, $[\![\Sigma]\!]$ on joukkoon Σ kuuluvien lauseiden kaikkien sijoitusesiintymien joukko.

- Esim. Jos $\Sigma = \{P \rightarrow P\}$, $[\![\Sigma]\!]$ sisältää mm. lauseet
  $P \rightarrow P$
  $\neg P \rightarrow \neg P$
  $\Box\Box Q \rightarrow \Box\Box Q$
  $(\Box(P \rightarrow Q) \rightarrow (\Box P \rightarrow \Box Q)) \rightarrow (\Box(P \rightarrow Q) \rightarrow (\Box P \rightarrow \Box Q))$
- Jatkossa annetaan tietyille lauseille nimiä.
  Esim. I: $P \rightarrow P$
- Ko. lauseen sijoitusesiintymien joukkoa merkitään $[\![\mathrm{I}]\!]$ ja tällä tarkoitetaan siis joukkoa $[\![\{P \rightarrow P\}]\!]$.

© 2003 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

Modaalilogiikka K

- Olkoon $\mathbf{K}$ kaikkien kehysten joukko.
- $\mathbf{K}$ heikoin normaali modaalilogiikka: jos lause on $\mathbf{K}$-pätevä, se on $\mathbf{L}$-pätevä, jokaisella normaalilla modaalilogiikalla $\mathbf{L}$.
- Karakteristinen lause K: $\Box(P \rightarrow Q) \rightarrow (\Box P \rightarrow \Box Q)$
- Jokainen joukon $[\![\mathrm{K}]\!]$ lause on $\mathbf{K}$-pätevä [Mahdollisten maailmojen semantiikan perusteoreema, kohta 2]

  (Olkoon $\mathcal{M},s \models \Box(P \rightarrow Q)$. Tällöin kaikille t, joille sRt,

  $\mathcal{M},t \models P \rightarrow Q$. Jos $\mathcal{M},s \models \Box P$, kaikille t, joille sRt, $\mathcal{M},t \models P$.

  Tällöin kaikille t, joille sRt, $\mathcal{M},t \models Q$ ja $\mathcal{M},s \models \Box Q$.

  Siis $\mathcal{M},s \models \Box(P \rightarrow Q) \rightarrow (\Box P \rightarrow \Box Q)$.)

© 2003 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

Modaalilogiikka T

- $\mathbf{T}$: refleksiivisten kehysten joukko.
  (Kehys $\langle S,R\rangle$ on refleksiivinen, jos $\forall x(xRx)$ tosi kehyksessä).
- Esimerkiksi jos $\Box$ tarkoittaa tietämistä, kehysten refleksiivisyys on luontevaa: jos agentti tietää, että P, P on totta.
  - Olkoon $\langle S,R,v\rangle,s \models \Box P$.
  - Jotta myös $\langle S,R,v\rangle,s \models P$, riittää, että R on refleksiivinen:

    Jos $\langle S,R,v\rangle,s \models \Box P$,

    kaikilla $t \in S$, joille sRt, $\langle S,R,v\rangle,t \models P$.

    Kun R refleksiivinen, sRs ja $\langle S,R,v\rangle,s \models P$.

© 2003 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

Modaalilogiikka T

Modaalilogiikan $\mathbf{T}$ karakteristinen lause
T: $\Box P \rightarrow P$
on pätevä kehyksessä joss kehys on refleksiivinen.

$\boxed{\Rightarrow}$ $\mathbf{T} = \mathbf{K} + [\![\mathrm{T}]\!]$

Propositio. $\Sigma \models_{\mathbf{T}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss $\Sigma \cup [\![\mathrm{T}]\!] \models_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

Todistus. $(\Leftarrow)$ Olkoon $\Sigma \cup [\![\mathrm{T}]\!] \models_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

Koska $\mathbf{T} \subseteq \mathbf{K}$, $\Sigma \cup [\![\mathrm{T}]\!] \models_{\mathbf{T}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

Lauseet $[\![\mathrm{T}]\!]$ ovat $\mathbf{T}$-päteviä (ks. ed. luento).

Siis $\Sigma \models_{\mathbf{T}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

$(\Rightarrow)$ Oletetaan, että $\Sigma \cup [\![\mathrm{T}]\!] \models_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$ ei päde.

On olemassa malli $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$ siten, että lauseet $\Sigma \cup [\![\mathrm{T}]\!]$ ovat päteviä tässä mallissa ja tässä mallissa on maailma s, jossa $\langle S, R, v\rangle, s \Vdash \Upsilon \cup \{\neg P\}$.

Olkoon $R^* = R \cup \{\langle s, s\rangle, s \in S\}$. Osoitetaan, että jokaiselle lauseelle Q ja maailmalle $s \in S$: $\langle S, R, v\rangle, s \Vdash Q$ joss $\langle S, R^*, v\rangle, s \Vdash Q$ induktiolla lauseen Q rakenteen suhteen:

- Lause on atomilause Q:
  $\langle S, R, v\rangle, s \Vdash Q$ joss $\langle S, R^*, v\rangle, s \Vdash Q$.
- Lause on muotoa $\neg Q$:
  $\langle S, R, v\rangle, s \Vdash \neg Q$ joss $\langle S, R, v\rangle, s \nVdash Q$ joss (induktio-oletuksella)
  $\langle S, R^*, v\rangle, s \nVdash Q$ joss $\langle S, R^*, v\rangle, s \Vdash \neg Q$
  ...

- Lause on muotoa $\Box Q$:
  $(\Leftarrow)$ Jos $\langle S, R, v\rangle, s \nVdash \Box Q$, on olemassa t, jolle sRt, $\langle S, R, v\rangle, t \nVdash Q$.
  Induktio-oletuksella $\langle S, R^*, v\rangle, t \nVdash Q$.
  Nyt sR^*t ja $\langle S, R^*, v\rangle, s \nVdash \Box Q$.
  $(\Rightarrow)$ Jos $\langle S, R^*, v\rangle, s \nVdash \Box Q$, on olemassa t, jolle sR^*t, $\langle S, R^*, v\rangle, t \nVdash Q$.
  1. Jos $t \neq s$, sRt ja $\langle S, R, v\rangle, s \nVdash \Box Q$.
  2. Jos $t = s$, $\langle S, R, v\rangle, s \nVdash Q$.
     Koska $\Box Q \rightarrow Q$ on pätevä mallissa $\langle S, R, v\rangle$, $\langle S, R, v\rangle, s \nVdash \Box Q$.

Siis $\langle S, R^*, v\rangle \models \Sigma \cup [\![\mathrm{T}]\!]$ ja $\langle S, R^*, v\rangle, s \Vdash \Upsilon \cup \{\neg P\}$.
$\boxed{\Rightarrow}$ Koska $\langle S, R^*\rangle$ on refleksiivinen kehys, myöskään $\Sigma \models_{\mathbf{T}} \Upsilon \Longrightarrow P$ ei päde. ■

Mallien relaatioiden ominaisuuksia

Kehyksen ominaisuuksia ja vastaavia modaalilogiikan lauseita:

1. Refleksiivisyys:	
$\forall s(sRs)$	$\Box A \rightarrow A$
2. Symmetrisyys:	
$\forall s \forall t(sRt \rightarrow tRs)$	$A \rightarrow \Box\Diamond A$
3. Sarjallisuus:	
$\forall s \exists t(sRt)$	$\Box A \rightarrow \Diamond A$
4. Transitiivisuus:	
$\forall s \forall t \forall u(sRt \wedge tRu \rightarrow sRu)$	$\Box A \rightarrow \Box\Box A$
5. Euklidisuus:	
$\forall s \forall t \forall u(sRt \wedge sRu \rightarrow tRu)$	$\neg\Box A \rightarrow \Box\neg\Box A$

Mallien relaatioiden ominaisuuksia

6. Osittain funktionaalinen:

$\forall s \forall t \forall u (sRt \wedge sRu \rightarrow t = u)$	$\Diamond A \rightarrow \Box A$

7. Funktionaalinen:

$\forall s \exists ! t (sRt)$	$\Diamond A \leftrightarrow \Box A$

8. Heikosti tiheä:

$\forall s \forall t (sRt \rightarrow \exists u (sRu \wedge uRt))$	$\Box\Box A \rightarrow \Box A$

9. Heikosti kytketty:

$\forall s \forall t \forall u (sRt \wedge sRu \rightarrow$	$\Box (A \wedge \Box A \rightarrow B) \vee$
$tRu \vee t = u \vee uRt)$	$\Box (B \wedge \Box B \rightarrow A)$

10. Heikosti suunnattu:

$\forall s \forall t \forall u (sRt \wedge sRu \rightarrow \exists v (tRv \wedge uRv))$	$\Diamond\Box A \rightarrow \Box\Diamond A$

© 2003 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

Teoreema. Olkoon $\mathcal{F} = \langle S, R \rangle$ jokin kehys. Silloin kullekin ominaisuuksista 1–10, jos R täyttää ominaisuuden, niin vastaavan lauseen kaikki sijoitusesiintymät ovat päteviä $\mathcal{F}$:ssä.

Todistus.

2. Olkoon R symmetrinen. Osoitetaan, että $\langle S, R \rangle \models [\![A \rightarrow \Box\Diamond A]\!]$.
   Vastaoletus: löytyy sijoitusesiintymä $A \rightarrow \Box\Diamond A$, jolle $\langle S, R \rangle \not\models A \rightarrow \Box\Diamond A$.
   Tällöin löytyy malli $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$ ja maailma $s \in S$, jossa $\mathcal{M}, s \Vdash A$ ja $\mathcal{M}, s \nVdash \Box\Diamond A$.

   Siis on olemassa t, jolle sRt ja $\mathcal{M}, t \nVdash \Diamond A$. Täten kaikilla t', tRt', $\mathcal{M}, t' \nVdash A$. Koska R:n symmetrinen, tRs ja siis $\mathcal{M}, s \nVdash A$, ristiriita.
   Siis vastaoletus ei päde ja $\langle S, R \rangle \models [\![A \rightarrow \Box\Diamond A]\!]$ pätee.

Loput kohdat samaan tapaan. ■

© 2003 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

Teoreema. Kun kehyksessä $\mathcal{F} = \langle S, R \rangle$ jonkin lauseista 1–10 kaikki sijoitusesiintymät ovat päteviä, niin R täyttää vastaavan ominaisuuden.

Todistus.

6. Ositt. funkt. ($\forall s \forall t \forall u (sRt \wedge sRu \rightarrow t = u)$) vs. $\Diamond A \rightarrow \Box A$:
   Olkoon $\langle S, R \rangle \models [\![\Diamond A \rightarrow \Box A]\!]$.
   Vastaoletus: R ei ole osittain funktionaalinen. Tällöin on olemassa $s, t, u \in S$ siten, että sRt, sRu, mutta $t \neq u$.
   Valitaan valuaatio v, jossa atomilauseelle P: $v(t, P) = \text{true}$ ja $v(u, P) = \text{false}$. Nyt $\langle S, R, v \rangle, s \Vdash \Diamond P$ ja $\langle S, R, v \rangle, s \nVdash \Box P$. Siis $\langle S, R \rangle \not\models \Diamond P \rightarrow \Box P$.
   Siis kaikki lauseen $\Diamond A \rightarrow \Box A$ sijoitusesiintymät eivät ole päteviä kehyksessä $\langle S, R \rangle$. Tämä on ristiriidassa alkuoletukseen, joten vastaoletus ei päde ja R on ositt. funktionaalinen.

Loput kohdat samaan tapaan. ■

© 2003 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

Modaalilogiikka K4

K4 on transitiivisten kehysten joukko.

Karakteristinen lause

$4 : \Box P \rightarrow \Box\Box P$ (positiivinen itsetutkiskelu)

Propositio. $\Sigma \models_{\mathbf{K4}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss $\Sigma \cup [\![4]\!] \models_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

Modaalilogiikka S4

S4 on transitiivisten ja refleksiivisten kehysten joukko.

Propositio. $\Sigma \models_{\mathbf{S4}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss $\Sigma \cup [\![4]\!] \cup [\![\mathrm{T}]\!] \models_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

© 2003 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

Modaalilogiikka KB

KB on symmetristen kehysten joukko.

Karakteristinen lause

$\mathrm{B}: P \rightarrow \Box\Diamond P$

Propositio. $\Sigma \models_{\mathbf{KB}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss $\Sigma \cup [\![\mathrm{B}]\!] \models_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

Modaalilogiikka B

B on symmetristen ja refleksiivisten kehysten joukko.

Propositio. $\Sigma \models_{\mathbf{B}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss $\Sigma \cup [\![\mathrm{B}]\!] \cup [\![\mathrm{T}]\!] \models_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

$\boxed{\Rightarrow}$ **KBT**

© 2003 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

Modaalilogiikka S5

S5 on ekvivalenttisten (symmetristen, refleksiivisten ja transitiivisten) kehysten joukko.

Karakteristinen lause

$5: \neg\Box P \rightarrow \Box\neg\Box P$ (Negatiivinen itsetutkiskelu)

Propositio.
$\Sigma \models_{\mathbf{S5}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss
$\Sigma \cup [\![\mathrm{T}]\!] \cup [\![4]\!] \cup [\![\mathrm{B}]\!] \models_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss
$\Sigma \cup [\![\mathrm{T}]\!] \cup [\![4]\!] \cup [\![5]\!] \models_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss
$\Sigma \cup [\![\mathrm{T}]\!] \cup [\![5]\!] \models_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

Välttämättömyyden ja ideaalisen tietämisen logiikka.

© 2003 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

Modaalilogiikka D

D on sarjallisten kehysten joukko.

Karakteristinen lause

$\mathrm{D}: \Box P \rightarrow \Diamond P$

$\Sigma \models_{\mathbf{D}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss $\Sigma \cup [\![\mathrm{D}]\!] \models_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

Modaalilogiikka D4

D4 on sarjallisten ja transitiivisten kehysten joukko.

$\Sigma \models_{\mathbf{D4}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss $\Sigma \cup [\![\mathrm{D}]\!] \cup [\![4]\!] \models_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

Modaalilogiikka DB

DB on sarjallisten ja symmetristen kehysten joukko.

$\Sigma \models_{\mathbf{DB}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss $\Sigma \cup [\![\mathrm{D}]\!] \cup [\![\mathrm{B}]\!] \models_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

© 2003 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

Uskomisen logiikka

Se mitä uskotaan ei ole välttämättä totta.

$\boxed{\Rightarrow}$ Kehykset eivät ole välttämättä refleksiivisiä.

Otetaan positiivinen ja negatiivinen itsetutkiskelu.

$\boxed{\Rightarrow}$ Modaalilogiikka **K45**.

Mutta $\neg\Box\bot$ ei ole **K45**-pätevä. ($\langle\{s\},\emptyset,v\rangle, s \mid\mid\!\!- \Box\bot$)

Vaaditaan lisäksi sarjallisuus.
$\boxed{\Rightarrow}$ Modaalilogiikka **KD45**
(sarjalliset, transitiiviset ja euklidiset kehykset).
HUOM! Transitiivisuus ei ole redundanttia: $\Box P \rightarrow \Box\Box P$ ei ole pätevä sarjallisten ja euklidisten kehysten joukossa (**KD5**-pätevä).

© 2003 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

- $\neg\Box\bot$ on **KD45**-pätevä.
- $\Box P \rightarrow P$ ei ole **KD45**-pätevä.
- $\Box(\Box P \rightarrow P)$ on **KD45**-pätevä.

  Olkoon $\langle S,R\rangle$ **KD45**-kehys.

  Olkoon $s \in S$ ja sRt.

  Euklidisuus: tRt (sRt ja sRt).

  Joten kaikilla t, joilla sRt, tRt.

  Nyt $\langle S,R,v\rangle, s \Vdash \Box(\Box P \rightarrow P)$,
  koska kaikilla t, joilla sRt,
  $\langle S,R,v\rangle, t \Vdash \Box P \rightarrow P$.

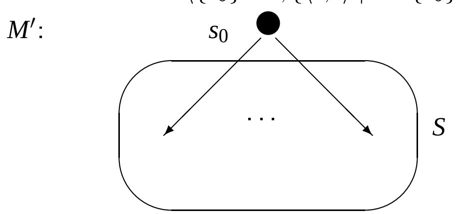
© 2003 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

Yksinkertaisempi kehysluokka: S5 ja KD45

Modaalilogiikan **S5** kehyksiksi riittävät *universaalikehykset*, so. kehykset $\langle S,R\rangle$, joissa $R = \{\langle s,t\rangle \mid s,t \in S\}$.

Propositio. Jos lause P on tosi **S5**-kehykseen perustuvassa mallissa, P on tosi myös universaalikehykseen perustuvassa mallissa.

Propositio. Jos lause P on tosi **KD45**-kehykseen perustuvassa mallissa, P on tosi mallissa muotoa $M' = \langle \{s_0\} \cup S, \{\langle s,t\rangle \mid s \in \{s_0\} \cup S, t \in S\}, v\rangle$.



© 2003 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

Deduktioteoreema ja kompaktius

- Kaikilla edellä mainituilla logiikoilla globaali deduktioteoreema pätee:

  $\Sigma \cup \{Q\} \models_{\mathbf{L}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss
  jollekin n $\Sigma \models_{\mathbf{L}} \Upsilon \cup \{\Box^0 Q, \Box^1 Q, \ldots, \Box^n Q\} \Longrightarrow P$.
- Logiikat ovat kompakteja:

  Jos $\Sigma \models_{\mathbf{L}} \Upsilon \Longrightarrow P$, niin on olemassa äärelliset joukot $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ ja $\Upsilon_0 \subseteq \Upsilon$ siten, että $\Sigma_0 \models_{\mathbf{L}} \Upsilon_0 \Longrightarrow P$.
- Näin ei ole kuitenkaan kaikilla modaalilogiikoilla eikä edes kehyslogiikoilla.

© 2003 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

Modaalilogiikka GL

GL on transitiivisten, irrefleksiivisten ja äärellisten kehysten joukko (tai transitiivisten kehysten joukko, joissa ei ole ääretöntä ketjua saavutettavia maailmoja).

Tämä ei vastaa mitään (ensimmäisen kertaluvun) predikaattilogiikan lauseella ilmaistavaa kehysten ominaisuutta.

Karakteristinen lause

$\mathrm{GL} : \Box(\Box P \rightarrow P) \rightarrow \Box P$

Globaali deduktioteoreema ei päde eikä **GL** ole kompakti.

Jos Σ ja Υ ovat äärellisiä lausejoukkoja, $\Sigma \models_{\mathbf{GL}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss $\Sigma \cup [\![\mathrm{GL}]\!] \models_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

© 2003 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio