Johdantoa modaalilogiikkaan

- Käsitteiden välttämätön, aikominen, tietäminen, uskominen, tuleva, mennyt, todistuva, tosi tapahtuman jälkeen, ... logiikkaa
- Mitkä ovat ko. käsitteiden ominaisuudet?
  Jos tiedät jotain, tiedätkö että tiedät sen?
  Jos et tiedät jotain, tiedätkö ettet tiedät sitä?
  Jos tiedät jotain, onko asia totta?
- Systemaattinen (Kripke/mahdollisten maailmojen) semantiikkaan perustuva lähestymistapa.

Esimerkki: Mutaiset lapset—tietämyslogiikka

- Kaksi lasta, joilla kummallakin mutainen otsa.
- Lapset näkevät toisensa.
- Äiti sanoo: "ainakin toisella on mutainen otsa".
- Äiti kysyy: "tiedättekö, onko otsanne mutainen vai ei"?
- Molemmat vastaavat "en tiedä".
- Äiti kysyy: "tiedättekö, onko otsanne mutainen vai ei"?
- Molemmat vastaavat: "tiedän otsani olevan mutainen".

Formalisointi: Lapset a ja b.
A: a:lla mutainen otsa / B: b:lla mutainen otsa
K_aB: a tietää, että b:lla on mutainen otsa.

Äiti sanoo: "ainakin toisella on mutainen otsa".

$A \vee B$
$K_a(A \vee B)$
$K_b(A \vee B)$

$$K_aK_b(A \vee B) \tag{1}$$

Lapset näkevät toisensa.

$$K_a(K_bA \vee K_b\neg A) \tag{2}$$

Äiti kysyy: "tiedättekö, onko otsanne mutainen vai ei"? Molemmat vastaavat "en tiedä".

$$K_a\neg K_bB \tag{3}$$

Lauseista 1–3 seuraa K_aA.

Millä perusteella?

Semanttinen tarkaskelu

Miten esitetään tietämistä ja ei-tietämistä?

- Joukko lauselogiikan malleja (mahdollisia maailmoja).
- a tietää P:n (K_aP) joss P tosi kaikissa mahdollisissa maailmoissa. Esim. Olkoon a:n mahdollisten maailmojen joukko $\{\{P,Q\},\{Q\}\}$. Tällöin K_aQ on tosi, mutta K_aP ei ole.
- Mitkä maailmat mahdollisia?
  Formalisoidaan tietäminen seuraavasti:
  Kussakin maailmassa s agentilla a on joukko a:n kannalta samanarvoisia mahdollisia maailmoja.
  $\boxed{\Rightarrow}$ Kaikkien maailmojen luokka jakaantuu agentin a kannalta kokoelmaksi erillisiä joukkoja mahdollisia maailmoja. Samoin b:n kannalta.

Osoitetaan, että lauseista 1–3 loogisesti seuraa K_aA, t.s. että jokaisessa tietämysmallin maailmassa, jossa lauseet 1–3 ovat totta, on K_aA totta.

Olkoon S jokin a:n kannalta mahdollisten maailmojen joukko ja s eräs S:n maailma.
S jakaantuu erillisiin joukkoihin $T_1, T_2, \ldots$ b:n kannalta mahdollisia maailmoja.

- Lause $K_a(K_bA \vee K_b\neg A)$ tosi s:ssä. Siis $(K_bA \vee K_b\neg A)$ tosi kaikissa S:n maailmoissa.
  $\boxed{\Rightarrow}$ Kaikille $i = 1, 2, \ldots$
  joko A on tosi kaikissa T_i:n maailmoissa tai
  A on epätosi kaikissa T_i:n maailmoissa.

- Lause $K_aK_b(A \vee B)$ tosi s:ssä.
  Siis $K_b(A \vee B)$ tosi kaikissa S:n maailmoissa.
  $\boxed{\Rightarrow}$ Kaikille $i = 1, 2, \ldots$
  $A \vee B$ on tosi kaikissa T_i:n maailmoissa.
  $\boxed{\Rightarrow}$ Kaikille $i = 1, 2, \ldots$
  joko A on tosi kaikissa T_i:n maailmoissa tai
  B on tosi kaikissa T_i:n maailmoissa.

- $K_a\neg K_bB$ tosi s:ssä.
  Siis $\neg K_bB$ tosi kaikissa S:n maailmoissa.
  $\boxed{\Rightarrow}$ Kaikille $i = 1, 2, \ldots$
  B on epätosi jossain T_i:n maailmassa.
  $\boxed{\Rightarrow}$ Kaikille $i = 1, 2, \ldots$
  A on tosi kaikissa T_i:n maailmoissa.
  $\boxed{\Rightarrow}$ A on tosi kaikissa S:n maailmoissa.
  $\boxed{\Rightarrow}$ K_aA tosi s:ssä

Syntaktinen tarkastelu

Mitä tietämiseen liittyviä periaatteita tarvitaan?

- **Prop. päättely:** tautologiat + MP: $\dfrac{P, P \rightarrow Q}{Q}$
- **Distributiivisuus:** $K_a(P \rightarrow Q) \rightarrow (K_aP \rightarrow K_aQ)$
- **N-sääntö:**

$$\frac{P}{K_aP}$$

- **R-sääntö:**

$$\frac{P \rightarrow Q}{K_a P \rightarrow K_a Q}$$

Huom! Johdettu sääntö:

1.	$P \rightarrow Q$	
2.	$K_a(P \rightarrow Q)$	[N, 1]
3.	$K_a(P \rightarrow Q) \rightarrow (K_a P \rightarrow K_a Q)$	[Distr]
4.	$(K_a P \rightarrow K_a Q)$	[MP, 2,3]

- **T:** $K_a P \rightarrow P$

Lauseen $K_a A$ johto premisseistä 1–3 käyttäen edellä annettuja tietämiseen liittyviä periaatteita:

1. $K_a K_b(\neg A \rightarrow B)$	[P1]
2. $K_a(\neg K_b \neg A \rightarrow K_b A)$	[P2]
3. $K_a \neg K_b B$	[P3]
4. $K_b(\neg A \rightarrow B) \rightarrow$ $(K_b \neg A \rightarrow K_b B)$	[Distr]
5. $K_a K_b(\neg A \rightarrow B) \rightarrow$ $K_a(K_b \neg A \rightarrow K_b B)$	[R, 4]
6. $K_a(K_b \neg A \rightarrow K_b B)$	[MP, 1, 5]
7. $(K_b \neg A \rightarrow K_b B) \rightarrow$ $(\neg K_b B \rightarrow \neg K_b \neg A)$	[Taut]
8. $K_a(K_b \neg A \rightarrow K_b B) \rightarrow$ $K_a(\neg K_b B \rightarrow \neg K_b \neg A)$	[R, 7]
9. $K_a(\neg K_b B \rightarrow \neg K_b \neg A)$	[MP, 6, 8]
10. $K_a(\neg K_b B \rightarrow \neg K_b \neg A) \rightarrow$ $(K_a \neg K_b B \rightarrow K_a \neg K_b \neg A)$	[Distr]
11. $K_a \neg K_b B \rightarrow K_a \neg K_b \neg A$	[MP, 9, 10]
12. $K_a \neg K_b \neg A$	[MP, 3, 11]
13. $K_a(\neg K_b \neg A \rightarrow K_b A) \rightarrow$ $(K_a \neg K_b \neg A \rightarrow K_a K_b A)$	[Distr]
14. $K_a \neg K_b \neg A \rightarrow K_a K_b A$	[MP, 2, 13]
15. $K_a K_b A$	[MP, 12, 14]
16. $K_b A \rightarrow A$	[T]
17. $K_a K_b A \rightarrow K_a A$	[R, 16]
18. $K_a A$	[MP, 15, 17]