T-79.146 **Kevät 2003**
Logiikka tietotekniikassa: erityiskysymyksiä I
Laskuharjoitus 5
14.2.2003

1. a) Anna lauseelle $\Box P \to \Box(Q \to P)$ (Hilbert-tyylinen) **K**-todistus.

b) Anna lauseelle
$$\Box\neg Q \to \Box\neg P$$
(Hilbert-tyylinen) **K**-johto lausejoukosta $\{\Box(P \to Q)\}$. Osoita siis, että
$$\{\Box(P \to Q)\} \vdash_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow \Box\neg Q \to \Box\neg P.$$

2. a) Anna lauseelle $\Box P$ (Hilbert-tyylinen) **KD45**-johto lauseesta
$$\Box\Box P$$
(osoita, että $\{\Box\Box P\} \vdash_{\mathbf{KD45}} \emptyset \Longrightarrow \Box P$).

b) Anna lauseelle $\neg\Box\bot$ **S4**-johto.

3. a) Osoita, että
$$\{P \to Q, \neg Q \to P, R\} \vdash_{\mathbf{K}} \{\neg R \vee Q, \neg Q \vee S\} \Longrightarrow \Box Q \wedge S$$
pätee (antamalla **K**-johto lauseelle $\Box Q \wedge S$).

b) Osoita, että
$$\{\Diamond Q \to \Box Q, Q \to \neg P\} \vdash_{\mathbf{K}} \{\Diamond P\} \Longrightarrow \Box\neg Q$$
pätee.

4. Lausejoukkoa Δ kutsutaan Σ-maksimaaliseksi, jos Δ on Σ-konsistentti ja jokaiselle lauseelle P joko $P \in \Delta$ tai $\neg P \in \Delta$. Osoita, että tällöin

a) $A \wedge B \in \Delta$ joss $A \in \Delta$ ja $B \in \Delta$.

b) $A \to B \in \Delta$ joss $A \notin \Delta$ tai $B \in \Delta$.

c) $A \vee B \in \Delta$ joss $A \in \Delta$ tai $B \in \Delta$.