**T-79.146** **Kevät 2003/IN**

**Logiikka tietotekniikassa: erityiskysymyksiä I**

**Tentti 8.5.2003**

**1.** a) Olkoon **L** kehysjoukko. Päteekö mille tahansa lauseille $P$, $Q$: jos $\{\} \models_{\mathbf{L}} \{\Box Q\} \Longrightarrow P$, niin $\{Q\} \models_{\mathbf{L}} \{\} \Longrightarrow P$ ? Perustele vastauksesi lyhyesti.

b) Anna kahden agentin tietämyslogiikan $\mathbf{S5}_2$ mukainen malli, jossa lause $\neg K_2 K_1 P \vee K_2 \neg K_1 P$ on tosi jossain mallin tilassa muttei ole pätevä mallissa. Tässä **S5** on refleksiivisten, symmetristen ja transitiivisten kehysten luokka, $K_1$ ja $K_2$ ovat modaalioperaattoreita agenttien 1 ja 2 tietämykselle ja $P$ on atomilause.

c) Anna LTL-malli, jossa LTL-lause $\neg(P\mathbf{U}(\neg Q))$ on toteutuva muttei pätevä ($P$ ja $Q$ ovat atomilauseita).

**2.** Tutki taulumenetelmällä, pitääkö annettu väite paikkansa. Anna (vasta)malli, kun se on mahdollista. ($P$ ja $Q$ ovat atomilauseita.)

a) $\{\} \models_{\mathbf{D4}} \{\Box P\} \Longrightarrow \Diamond((P \to \Box Q) \to Q)$ , missä **D4** on transitiivisten ja sarjallisten kehysten luokka.

b) $\{\neg\Diamond Q\} \models_{\mathbf{K}} \{\Diamond\neg P\} \Longrightarrow \Box\Box(\Diamond P \vee Q)$ , missä **K** on kaikkien kehysten luokka.

c) On olemassa sarjallinen malli ja siinä tila, jossa lause $\Box\Box(P \to \Box P)$ on epätosi ja lause $\Box P$ tosi.

**3.** a) Selitä, miksi oheinen lausejono ei ole hyväksyttävä **K**-johto lauseelle $R$ globaalista premissijoukosta $\{P\}$ ja lokaalista premissijoukosta $\{\Box P \to R\}$. Anna hyväksyttävä **K**-johto lauseelle $R$ ko. premissijoukoista eli osoita $\{P\} \vdash_{\mathbf{K}} \{\Box P \to R\} \Longrightarrow R$.

1. $P$
2. $\Box P \to R$
3. $\Box P$
4. $R$

b) Määrittele, mitä tarkoittaa Hilbert-todistusteorian virheettömyys (soundius) ja täydellisyys annetulle modaalilogiikalle L.

c) Olkoon annettuna Hilbert-tyylinen todistusteoria, jossa aksioomina ovat kaikki klassiset tautologiat ja kaikki muotoa $\Box(P \to Q) \to (\Box\Box P \to \Box\Box Q)$ olevat lauseet ja päättelysääntöinä Modus Ponens ja välttämättömyyssääntö (N-sääntö).

Olkoon **K** kaikkien kehysten joukko. Osoita, että yllä annettu todistusteoria ei ole virheetön modaalilogiikalle **K**.

**4.** a) LTL:n syntaksi voidaan määritellä käyttäen vain perusoperaattoreita $\vee$, $\neg$, **X**, **U**. Määritellään uusi temporaalioperaattori **W**, jonka semantiikka on seuraava ($\mathcal{M}$ on LTL-malli ja $x$ täysi polku siinä): $\mathcal{M}, x \models P\mathbf{W}Q$ joss kaikille $l$ $\mathcal{M}, x^l \models P$ tai on olemassa $i$, jolle $\mathcal{M}, x^i \models Q$ ja kaikille $j < i$ $\mathcal{M}, x^j \models P$. Anna lausetta $P\mathbf{W}Q$ vastaava LTL-lause käyttäen ainoastaan yo. perusoperaattoreita ($P$ ja $Q$ ovat atomilauseita).

b) Olkoon $\langle S, R, v\rangle$ tarkasteltavan järjestelmän CTL-malli, missä $S = \{a, b, c, d, e\}$,
$R = \{\langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle b, a\rangle, \langle c, b\rangle, \langle b, d\rangle, \langle d, d\rangle, \langle c, e\rangle, \langle e, e\rangle, \langle e, c\rangle\}$,
$v(a, \texttt{ack}) = v(d, \texttt{ack}) = v(e, \texttt{ack}) = \text{true}$, $v(b, \texttt{ack}) = v(c, \texttt{ack}) = \text{false}$,
$v(b, \texttt{req}) = v(c, \texttt{req}) = v(d, \texttt{req}) = \text{true}$, $v(a, \texttt{req}) = v(e, \texttt{req}) = \text{false}$.
Anna ne mallin tilat, joissa lause $\mathbf{A}(\top\mathbf{U}\neg\mathbf{E}(\neg\texttt{reg}\mathbf{U}\texttt{ack}))$ on tosi.

c) Tutki, onko CTL-lause

$$\mathbf{AG}P \to \mathbf{AXAG}P$$

on pätevä taulumenetelmällä.

Relaation $R$ ominaisuuksia:

| | |
|---|---|
| Refleksiivisyys: | $\forall s(sRs)$ |
| Symmetrisyys: | $\forall s\forall t(sRt \to tRs)$ |
| Sarjallisuus: | $\forall s\exists t(sRt)$ |
| Transitiivisuus: | $\forall s\forall t\forall u(sRt \wedge tRu \to sRu)$ |