T-79.146 **Kevät 2002**
Logiikka tietotekniikassa: erityiskysymyksiä I
Laskuharjoitus 8
Ratkaisut

1. **S4** on refleksiivisten ja transitiivisten kehysten joukko. Käännetään annettu lause predikaattikalkyylimuotoon:

$$
\begin{aligned}
\tau(\neg\Box\Box P \to \neg\Box P, x) &= \tau(\neg\Box\Box P, x) \to \tau(\neg\Box P, x) \\
&= \neg\tau(\Box\Box P, x) \to \neg\tau(\Box P, x) \\
&= \neg\forall y\big(R(x,y) \to \tau(\Box P, y)\big) \\
&\qquad \to \neg\forall y\big(R(x,y) \to \tau(P, y)\big) \\
&= \neg\forall y\Big(R(x,y) \to \forall x\big(R(y,x) \to \tau(P,x)\big)\Big) \\
&\qquad \to \neg\forall y\big(R(x,y) \to P(y)\big) \\
&= \neg\forall y\Big(R(x,y) \to \forall x\big(R(y,x) \to P(x)\big)\Big) \\
&\qquad \to \neg\forall y\big(R(x,y) \to P(y)\big) \\
&= \varphi
\end{aligned}
$$

Myös kehysaksioomat esitetään predikaattilogiikan lauseina, jolloin saadaan lauseet

$$\forall x R(x,x) \qquad \text{(refleksiivisyys)}$$

ja

$$\forall x\forall y\forall z\big(R(x,y) \land R(y,z) \to R(x,z)\big) \qquad \text{(transitiivisuus).}$$

Nämä lauseet otetaan mukaan taulutodistukseen merkitsemällä ne taulun juureen todeksi. Näiden lisäksi tauluun merkitään lause $\forall x\varphi$ epätodeksi.

Muodostetaan taulu:

$$
\begin{gathered}
1.\ T\big(\forall x R(x,x)\big) \\
2.\ T\Big(\forall x\forall y\forall z\big(R(x,y) \land R(y,z) \to R(x,z)\big)\Big) \\
3.\ E\,(\forall x\varphi) \\
| \\
4.\ E\Big(\neg\forall y\big(R(a,y) \to \forall x(R(y,x) \to P(x))\big) \to \neg\forall y\big(R(a,y) \to P(y)\big)\Big)^{3.\,x/a}
\end{gathered}
$$

$$5.\ T\Big(\neg\forall y\big(R(a,y)\to\forall x(R(y,x)\to P(x))\big)\Big)^{4.}$$

$$6.\ E\Big(\neg\forall y\big(R(a,y)\to P(y)\big)\Big)^{4.}$$

$$7.\ E\Big(\forall y\big(R(a,y)\to\forall x(R(y,x)\to P(x))\big)\Big)^{5.}$$

$$8.\ T\Big(\forall y\big(R(a,y)\to P(y)\big)\Big)^{6.}$$

$$9.\ E\Big(R(a,b)\to\forall x\big(R(b,x)\to P(x)\big)\Big)^{7.\,y/b}$$

$$10.\ T\big(R(a,b)\big)^{9.}$$

$$11.\ E\Big(\forall x\big(R(b,x)\to P(x)\big)\Big)^{9.}$$

$$12.\ E\big(R(b,c)\to P(c)\big)^{11.\,x/c}$$

$$13.\ T\big(R(b,c)\big)^{12.}$$

$$14.\ E\big(P(c)\big)^{12.}$$

$$15.\ T\big(R(a,c)\to P(c)\big)^{8.\,y/c}$$

$$16.\ E\big(R(a,c)\big)^{15.} \qquad\qquad 17.\ T\big(P(c)\big)^{15.}$$

$$\otimes$$

$$18.\ T\big(R(a,b)\wedge R(b,c)\to R(a,c)\big)^{2.\,x/a,\,y/b,\,z/c}$$

$$19.\ E\big(R(a,b)\wedge R(b,c)\big)^{18.} \qquad\qquad 20.\ T\big(R(a,c)\big)^{18.}$$

$$\otimes$$

$$21.\ E\big(R(a,b)\big)^{19.} \qquad\qquad 22.\ E\big(R(b,c)\big)^{19.}$$

$$\otimes \qquad\qquad \otimes$$

2. a) $\mathcal{M}, s_1 \Vdash K_1 P$, koska $v(s_1, P) = v(s_2, P) = \text{true}$, ja $\mathcal{M}, s_1 \Vdash K_2 P$ ja $\mathcal{M}, s_1 \Vdash K_3 P$, koska $v(s_1, P) = \text{true}$. Siten $\mathcal{M}, s_1 \Vdash EP$.

   b) $\mathcal{M}, s_1 \Vdash K_2 EP$ ja $\mathcal{M}, s_1 \Vdash K_3 EP$, koska $\mathcal{M}, s_1 \Vdash EP$. Lisäksi
   $\mathcal{M}, s_2 \Vdash K_1 P$, koska $v(s_1, P) = v(s_2, P) = \text{true}$,
   $\mathcal{M}, s_2 \Vdash K_2 P$, koska $v(s_2, P) = v(s_3, P) = \text{true}$ ja
   $\mathcal{M}, s_2 \Vdash K_3 P$, koska $v(s_2, P) = \text{true}$. Siten
   $\mathcal{M}, s_2 \Vdash EP$, mistä seuraa, että
   $\mathcal{M}, s_1 \Vdash K_1 EP$. Siis
   $\mathcal{M}, s_1 \Vdash EEP$.

   Toisaalta tulos saadaan myös, jos huomataan, että P on tosi kaikissa maailmoissa, jotka ovat saavutettavissa s_1:stä kahdella askeleella.

   c) $\mathcal{M}, s_1 \nVdash CP$, koska s_4 on C-saavutettavissa s_1:stä ja $v(s_4, P) = \text{false}$.

3. Jos kehys $\mathcal{F} = \langle S, R \rangle$, $|S| = n$ ja $R \subseteq S \times S$, niin kehysten määrä on

$$|\mathcal{P}(S \times S)| = 2^{n^2},$$

sillä jokaiselle maailmaparille $\langle s, t \rangle \in S \times S$ on aina joko $\langle s, t \rangle \in R$ tai $\langle s, t \rangle \notin R$. (Merkintä $\mathcal{P}(X)$ tarkoittaa joukon X kaikkien osajoukkojen joukkoa.) Jos siis $n = 10$, saadaan yhteensä $2^{100} \approx 1.3 \cdot 10^{30}$ erilaista kehystä, kun kehysten isomorfioita ei oteta huomioon.

4. Olkoon φ lause, joka ei ole **S5**-pätevä. Tällöin sillä on olemassa universaali vastamalli $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$, jossa on maailma $s \in S$, jolle $\mathcal{M}, s \nVdash \varphi$. (Universaalisuuden perusteella $R = S \times S$.) Olkoon

$$F = \{\Box\psi \mid \Box\psi \text{ on } \varphi\text{:n alilause ja } \mathcal{M}, s \Vdash \neg\Box\psi\}.$$

Silloin jokaista $\Box\psi \in F$ vastaa maailma $s_\psi \in S$ siten, että

$$\mathcal{M}, s_\psi \Vdash \neg\psi.$$

Olkoon $\mathcal{M}' = \langle S', R', v' \rangle$, missä

$$S' = \{s\} \cup \{s_\psi \mid \Box\psi \in F\} \subseteq S,$$

$R' = S' \times S'$ ja $v'(s', P) = v(s', P)$ kaikille φ:ssä esiintyville atomilauseille P ja kaikille $s' \in S'$. Koska $|F| < |\mathrm{Sub}(\varphi)|$, on silloin $|S'| \le |\mathrm{Sub}(\varphi)|$. ($|\mathrm{Sub}(\varphi)|$ on φ:n alilauseiden lukumäärä.)

Osoitetaan induktiolla, että jokaiselle $s' \in S'$ ja jokaiselle φ:n alilauseelle ψ pätee

$$\mathcal{M}, s' \Vdash \psi \quad \text{joss} \quad \mathcal{M}', s' \Vdash \psi.$$

Perustapaus (alilause on propositio) on triviaali. Myös muotoa $\psi' \wedge \psi''$ ja $\neg\psi$ olevien alilauseiden induktioaskeleet seuraavat heti. Olkoon sitten alilause muotoa $\Box\psi$. Olkoon $s' \in S'$.

Jos $\mathcal{M}, s' \Vdash \Box\psi$, niin $\mathcal{M}, t \Vdash \psi$ kaikilla $t \in S$, koska $\mathcal{M}$ on universaali. Erityisesti $\mathcal{M}, t \Vdash \psi$ kaikilla $t \in S'$. Induktio-oletuksen perusteella $\mathcal{M}', t \Vdash \psi$ kaikilla $t \in S'$, mistä seuraa, että $\mathcal{M}', s' \Vdash \Box\psi$.

Toisaalta, jos $\mathcal{M}, s' \nVdash \Box\psi$, niin $\mathcal{M}, t \Vdash \neg\Box\psi$ kaikilla $t \in S$, koska $\mathcal{M}$ on universaali. Erityisesti $\mathcal{M}, s \Vdash \neg\Box\psi$, ja siksi $\Box\psi \in F$. On siis olemassa maailma $s_\psi \in S'$ siten, että $\mathcal{M}, s_\psi \Vdash \neg\psi$, eli $\mathcal{M}, s_\psi \nVdash \psi$. Induktio-oletuksen perusteella seuraa, että $\mathcal{M}', s_\psi \nVdash \psi$, joten $\mathcal{M}', s_\psi \Vdash \neg\psi$. Siis $\mathcal{M}', s' \nVdash \Box\psi$.

Koska erityisesti $s \in S'$ ja $\mathcal{M}, s \nVdash \varphi$, yllä olevan tuloksen perusteella seuraa, että $\mathcal{M}', s \nVdash \varphi$. Siten myös $\mathcal{M}'$ on vastamalli φ:lle.

Jos φ ei ole **S5**-pätevä, on olemassa universaali vastamalli $\mathcal{M}$ ja maailma s siten, että $\mathcal{M}, s \nVdash \varphi$. Yllä olevan konstruktion avulla saadaan φ:lle toinen universaali vastamalli $\mathcal{M}'$, jossa on korkeintaan $|\mathrm{Sub}(\varphi)|$ maailmaa. $\Box$